dem Th 17 1. On suppose X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$

On note donc $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec $0 \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_n$

On fixe $a > 0$ et on note $I = \{k \in [\![1,n]\!] \,;\ x_k < a\}$

et $J = \{k \in [\![1,n]\!] \,;\ x_k \geqslant a\}$

On a donc $[\![1,n]\!] = I \uplus J$

D'après la relation de Chasles pour $\sum$ on a :

$$\mathbb{E}(X) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} x_k \times \mathbb{P}(X = x_k)$$

$$= \underbrace{\sum_{k \in I} \underbrace{x_k}_{\geqslant 0} \times \underbrace{\mathbb{P}(X = x_k)}_{\geqslant 0}}_{\geqslant 0} + \sum_{k \in J} x_k \times \mathbb{P}(X = x_k)$$

Donc $\mathbb{E}(X) \geqslant \sum_{k \in J} x_k \times \mathbb{P}(X = x_k)$

or pour tout $k \in J$ on a : $x_k \geqslant a$

donc : $x_k \times \mathbb{P}(X = x_k) \geqslant a \times \mathbb{P}(X = x_k)$

Par somme d'inégalités :

$$\sum_{k \in J} x_k \times \mathbb{P}(X = x_k) \geqslant \sum_{k \in J} a \times \mathbb{P}(X = x_k)$$

Mais $\sum_{k \in J} a \times \mathbb{P}(X = x_k) = a \times \sum_{k \in J} \mathbb{P}(X = x_k)$

et pour tout $\omega \in \Omega$ on a :

$$X(\omega) \geqslant a \iff \exists k \in J, \; X(\omega) = x_k$$

donc $\omega \in (X \geqslant a) \iff \omega \in \biguplus_{k \in J} (X = x_k)$

donc $(X \geqslant a) = \biguplus_{k \in J} (X = x_k)$

Par additivité de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) = \sum_{k \in J} \mathbb{P}(X = x_k)$$

On a donc :

$$\mathbb{E}(X) \geqslant \sum_{k \in J} x_k \times \mathbb{P}(X = x_k) \geqslant a \sum_{k \in J} \mathbb{P}(X = x_k) = a \times \mathbb{P}(X \geqslant a)$$

Comme $a > 0$: $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{1}{a} \mathbb{E}(X)$

2. Cette fois X est une V.A.R. quelconque.

Alors $|X|$ est une V.A.R. positif donc on peut utiliser 1.

On a : $\forall a > 0, \ \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \dfrac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$

Exemple 1. Soit X une V.A.R qcq.

Pour $a > 0$ on a :

pour tout $\omega \in \Omega$,

$$|X(\omega)| > a \iff X(\omega) > a \text{ ou } X(\omega) < -a$$

donc $(|X| > a) = (X > a) \uplus (X < -a)$

Par additivité de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(|X| > a) = \mathbb{P}(X > a) + \mathbb{P}(X < -a)$$

Comme $\mathbb{P}$ est à valeurs positives :

$$0 \leq \mathbb{P}(X > a) \leq \mathbb{P}(|X| > a)$$

Donc d'après l'inégalité de Markov :

$$\forall a > 0, \quad 0 \leq \mathbb{P}(X > a) \leq \frac{1}{a} \times \mathbb{E}(|X|)$$

Or $0 \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0$ et $\frac{1}{a}\mathbb{E}(|X|) \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0$ donc

par encadrement : $\mathbb{P}(X > a) \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0$

__Th18__ Si X est une VAR :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

__Réécriture__ : Pour $\omega \in \Omega$:

$$|X(\omega) - \mathbb{E}(X)| < \varepsilon \iff X(\omega) - \mathbb{E}(X) < \varepsilon \text{ et } X - \mathbb{E}(X) > -\varepsilon$$

$$\iff \mathbb{E}(X) - \varepsilon < X(\omega) < \mathbb{E}(X) + \varepsilon$$

donc $\left(|X - \mathbb{E}(X)| < \varepsilon\right) = \left(X \in \left]\mathbb{E}(X) - \varepsilon, \mathbb{E}(X) + \varepsilon\right[\right)$

Donc $\mathbb{P}\left(X \in \left]\mathbb{E}(X) - \varepsilon, \mathbb{E}(X) + \varepsilon\right[\right) = 1 - \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\right)$

$$\geqslant 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Or $1 - \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2} \xrightarrow[\varepsilon \to +\infty]{} 1$

Donc on peut choisir ε (assez grand) pour que

$X \in \left]\mathbb{E}(X) - \varepsilon, \mathbb{E}(X) + \varepsilon\right[$ soit réalisé avec

une probabilité proche de 1.

<u>dem Th 18</u> Soit X une V.A.R. quelconque.

La V.A.R. $(X-\mathbb{E}(X))^2$ est positive donc d'après l'inégalité de Markov :

$$\forall \varepsilon>0, \quad \mathbb{P}\left((X-\mathbb{E}(X))^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right)}{\varepsilon^2}$$

Mais $\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) \overset{\text{def}}{=} V(X)$

Et pour tout $\omega \in \Omega$:

$$(X(\omega)-\mathbb{E}(X))^2 \geq \varepsilon^2 \iff |X(\omega)-\mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon$$

Donc $\left((X-\mathbb{E}(X))^2 \geq \varepsilon^2\right) = \left(|X-\mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\right)$

Donc $\mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$