Chapitre 18

Variables aléatoires discrètes finies

Sommaire

Dans tout le chapitre, on considère une expérience aléatoire modélisée par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. E est un ensemble quelconque supposé non vide.

1 Variables aléatoires discrètes finies

1.1 Définitions

Définition 1 – Variable aléatoire

On appelle *variable aléatoire* à valeurs dans E toute application définie sur Ω et à valeurs dans E.

Lorsque $E = \mathbb{R}$, on dit que X est une *variable aléatoire réelle*, noté VAR en abrégé.

Notations : L'ensemble $X(\Omega)$ est un ensemble fini.
On note $n = \text{Card}\big(X(\Omega)\big)$ et $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

Dans la plupart des exemples que nous utiliserons, $X(\Omega)$ sera une partie de $\mathbb{N}$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $x_k = k$.

✎ ***Exemple.*** On lance deux dès cubiques distinguables : $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$.
On note X = Nombre de 6 obtenus. Alors X est une VAR et $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

⚠ Ne pas confondre *variable aléatoire* et *évènement*. Une variable aléatoire est un *nombre aléatoire*, et un évènement est un *prédicat aléatoire*, c'est-à-dire une phrase qui peut être vraie ou fausse.

Sur l'exemple précédent, on ne peut pas dire que « Nombre de 6 obtenus » est vrai ou faux, X n'est donc pas un évènement.

✎ ***Exemple.*** On considère une urne de 10 boules numérotées, composée de 6 boules blanches et 4 rouges. On effectue p tirages successifs d'une boule avec remise : $\Omega = [\![1, 10]\!]^p$.
On note X = Nombre de boules rouges obtenues. Alors X est une VAR et $X(\Omega) = [\![0, p]\!]$.

1.2 Évènements associés à une variable aléatoire

Notation : Si X est une variable aléatoire et A une partie de E, l'image réciproque de A par X :

$$X^{-1}(A) = \big\{\omega \in \Omega \big/ X(\omega) \in A\big\}$$

est une partie de Ω, donc un évènement. Il sera noté plus simplement $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$.

Cas particuliers :

- Si $A = \{a\}$ où $a \in E$, alors $(X \in \{a\})$ est noté plus simplement $(X = a)$.
- Si $E = \mathbb{R}$, et $A =]-\infty, x]$ où $x \in \mathbb{R}$, alors $\big(X \in]-\infty, x]\big)$ est noté plus simplement $(X \leq x)$.
  Si $A = [x, y[$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $\big(X \in [x, y[\big)$ est noté plus simplement $(x \leq X < y)$ etc…

Notation : Si X est une variable aléatoire et A une partie de E, alors $(X \in A)$ est un évènement, et on peut donc calculer $\mathbb{P}\big((X \in A)\big)$. Pour simplifier les notations on notera $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\big((X \in A)\big)$.

⚠ Si A est une partie de E, $(X \in A)$ est un évènement, et on peut donc calculer $\mathbb{P}(X \in A)$.
Par contre $\mathbb{P}(X)$ ne veut absolument rien dire...en effet X n'est pas un *évènement* mais une *variable aléatoire.*

✎ ***Exemple.*** On lance simultanément deux dès distinguables : $\Omega = [\![1,6]\!]^2$.
On pose X = Somme des deux chiffres obtenus. On a alors $X(\Omega) = [\![2,12]\!]$ et on peut considérer les évènements :

- $(X = 11) = \big\{(6,5);(5,6)\big\}$ donc $\mathbb{P}(X = 11) = \dfrac{2}{36}$
- $(X > 10) = \big\{(6,5);(5,6);(6,6)\big\} = (X = 11) \cup (X = 12)$ donc $\mathbb{P}(X > 10) = \dfrac{3}{36}$
- $(X \leq 1) = \emptyset$ évènement impossible, donc $\mathbb{P}(X \leq 1) = 0$
- $(X \leq 12) = \Omega = (X \geq 0)$ évènement certain, donc $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$

On peut comparer les évènements associés à X.

- Par exemple $(X \leq 5) \subseteq (X \leq 7)$ donc $\mathbb{P}(X \leq 5) \leq \mathbb{P}(X \leq 7)$:
  en effet $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq 5 \Longrightarrow X(\omega) \leq 7$.
- De plus $(X \geq 4) = (X > 3)$, donc $\mathbb{P}(X \geq 4) = \mathbb{P}(X > 3)$, car : $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq 4 \Longleftrightarrow X(\omega) > 3$.
- De même $(X = 3) = (X \geq 3) \cap (X < 4)$ donc $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}\big((X \geq 3) \cap (X < 4)\big)$.

⚠ Il faut bien comprendre que ces résultats viennent du fait que X ne prend que des valeurs *entières.*

Théorème 2 – Système complet d'évènements associés à une variable aléatoire

Si X est une variable aléatoire, alors la famille $\big([X = x]\big)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements.

Autrement dit : si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors la famille $\big([X = x_1], [X = x_2], \dots, [X = x_n]\big)$ est un s.c.e..

1.3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 3 – Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Si X est une variable aléatoire de Ω vers E, on appelle loi de probabilité de X l'application

$$\mathbb{P}_X : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}(X = x) \end{array}$$

⚠ Si $x \notin X(\Omega)$, on a $\mathbb{P}(X = x) = 0$, donc avant de déterminer la loi de X, on commence par déterminer $X(\Omega)$, c'est-à-dire les valeurs prises par la variable aléatoire X.

Si on note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, déterminer la loi de X c'est donc calculer $\mathbb{P}(X = x_k)$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Pour de petites valeurs de n, on peut représenter les résultats sous forme d'un tableau à une entrée :

x	x_1	x_2	$\dots$	$\dots$	x_n
$\mathbb{P}(X = x)$	?	?			?

ou d'un diagramme en bâtons.

Théorème 4 – La loi d'une VAR est une probabilité

La loi de X est une probabilité sur l'univers $X(\Omega)$.

Corollaire 5 – Propriétés élémentaires d'une loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire. On a alors :

$$\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x) \in [0, 1] \quad \text{et} \quad \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$$

Donc si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors :

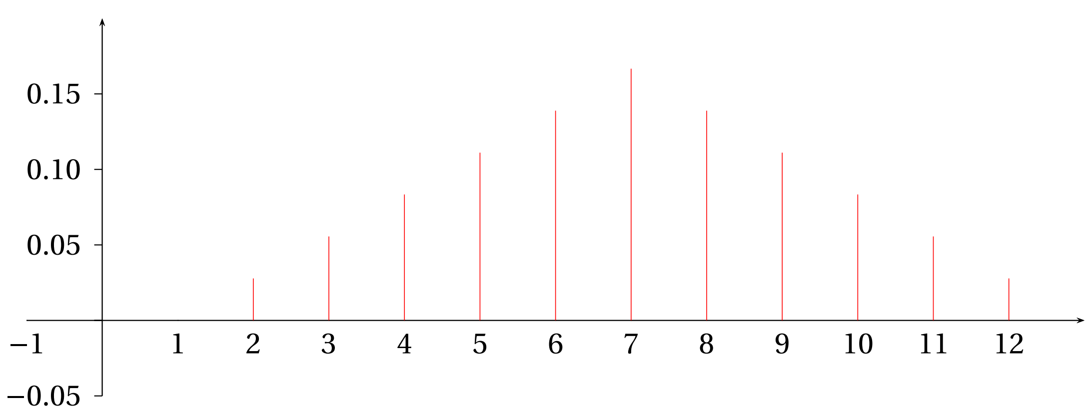
$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_k) = 1$$

Dans le tableau représentant la loi de X, la somme des cases de la seconde linge doit donc être égale à 1.

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés distinguables et on note X = Sommes des deux chifres obtenus. Alors $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ et la loi de probabilité de X est :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

On obtient le diagramme en bâtons :



Théorème 6 – Existence d'une variable aléatoire ayant une loi de probabilité donnée

On se donne des réels $p_1, \ldots, p_n$, vérifiant :

(i) $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $p_k \geq 0$;

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Alors pour tous réels deux à deux distincts $x_1, \ldots, x_n$, il existe une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ telle que :

$$X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ et } \forall k \in [\![1, n]\!],\ p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$$

Et donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p_k \in [0, 1]$.

Il n'y a unicité, ni de $(\Omega, \mathbb{P})$, ni de la variable aléatoire X.

✎ ***Exemple.*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une variable aléatoire X, à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, et de loi donnée par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$$

<u>**Cas particulier où $X(\Omega) \subseteq [\![0, n]\!]$**</u> **:** Dans ce cas, la donnée des probabilités $\mathbb{P}(X = k)$ équivaut à celle des probabilités $\mathbb{P}(X \leq k)$ ou $\mathbb{P}(X \geq k)$. On dispose en effet des formules suivantes (à savoir redémontrer), valables pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k - 1) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k + 1)$$

et :

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X = j) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{j=k}^{n} \mathbb{P}(X = j)$$

On a le même type de formules avec des inégalités strictes en remarquant que :
$\mathbb{P}(X \leq k) = \mathbb{P}(X < k + 1)$ et $\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(X > k - 1)$.

✎ ***Exemple.*** Dans une urne de n boules numérotées, on effectue n tirages d'une boule sans remise (l'urne est vidée).
On note X = nombre de tirages nécessaires pour obtenir un numéro supérieur ou égal au précédent, avec la convention que $X = n + 1$ si ceci ne se produit pas au bout des n tirages.
Donner la loi de X.

1.4 Transfert de loi

On se donne F un ensemble non vide.

On considère une variable aléaztoire $X : \Omega \longrightarrow E$ et une fonction $f : E \longrightarrow F$ telle que $X(\Omega) \subseteq \mathscr{D}_f$.
On a alors le schéma de composition :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}_f \subseteq E \arrow[r, "f"] & F \\ \Omega \arrow[u, "X"] \arrow[ur, "f \circ X"'] & \end{tikzcd}$$

L'application $Y = f \circ X$ est aussi une variable aléatoire définie sur Ω. On la note plus simplement $Y = f(X)$.

Connaissant la loi de X et l'expression de la fonction f, nous souhaiterions déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = f(X)$: c'est ce qu'on appelle un *transfert de loi* (la loi de X est transférée par la fonction f).

Valeurs prises par Y :
Si X est une VARD finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors $Y(\Omega) = \left\{f(x_1), \dots, f(x_n)\right\}$. On peut aussi noter $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$ avec $y_1 < y_2 < \cdots < y_p$; dans ce cas $p \leq n$ (car f peut ne pas être injective).

✎ ***Exemple.*** $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $Y = X^2$ donne $Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$.

On peut maintenant s'intéresser à la loi de Y. Pour cela il est important de comprendre le point suivant : si on prend $y \in Y(\Omega)$ une valeur prise par la VARD Y, alors, par définition, y a un antécédent par f dans $X(\Omega)$: $\exists x \in X(\Omega)$ tel que $y = f(x)$. Et comme f est en général non injective, il y a plusieurs valeurs de x possibles, voire même une infinité !

✎ ***Exemple.*** Sur l'exemple précédent, 1 a deux antécédents : -1 et 1.

Théorème 7 – Formule de transfert de loi

La loi de $Y = f(X)$ est donnée par :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } f(x) = y}} \mathbb{P}(X = x)$$

On somme sur tous les antécédents de y.

✎ ***Exemple.*** Si la loi de X est donnée par :

k	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = k)$	$1/5$	$1/10$	$1/10$	$1/5$	$2/5$

et si $Y = X^2$, alors $Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$ et :

k	0	1	4
$\mathbb{P}(Y = k)$	$1/10$	$3/10$	$3/5$

2 Espérance mathématique d'une VAR

Dans tout ce paragraphe, X est une variable aléatoire réelle avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

2.1 Définition

Définition 8 – Espérance mathématique d'une VAR

On appelle *espérance* de X le réel :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \times \mathbb{P}(X = x_k)$$

On peut aussi écrire la formule de la manière suivante :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x)$$

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés distinguables et on note X = Sommes des deux chifres obtenus. Alors $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ et la loi de probabilité de X est :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

Puisque X est une VARD finie, $\mathbb{E}(X)$ existe et :

$$\mathbb{E}(X) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} + 7 \times \frac{6}{36} + 8 \times \frac{5}{36} + 9 \times \frac{4}{36} + 10 \times \frac{3}{36} + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36}$$

Donc $\mathbb{E}(X) = 7$.

C'est la notion d'espérance qui justifie historiquement l'introduction de la notion de variable aléatoire en plus de celle d'évènements. Par exemple si on lance n fois une pièce, et si on note E_i = « le i-ième lancer donne pile » et X = « nombre de piles obtenus sur les n lancers » alors l'évènement $(X = k)$ se décompose en unions/intersections d'évènements E_i. On peut donc se demander quel est l'intérêt d'utiliser la VARD X...? L'intérêt est qu'on voudrait calculer le nombre moyen de piles obtenus sur les n lancers, ie calculer $\mathbb{E}(X)$, et cette quantité ne s'exprime pas en fonction des E_i !

2.2 Théorème de transfert

On reprend les notations du paragraphe sur le transfert de loi avec $E = F = \mathbb{R}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}_f \subseteq \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\
\Omega \arrow[u, "X"] \arrow[ur, "f \circ X"'] &
\end{tikzcd}$$

On a vu que la loi de la variable aléatoire $Y = f(X)$ se calcule par la formule :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } f(x)=y}} \mathbb{P}(X = x)$$

On veut cette fois calculer son espérance :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y \times \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left[y \times \left(\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } f(x)=y}} \mathbb{P}(X = x) \right) \right]$$

On peut voir que le calcul est compliqué. On va donc essayer d'avoir une formule simple, donnant $\mathbb{E}(Y)$ connaissant la loi de X, et **sans avoir à calculer la loi de Y.**

Théorème 9 – Théorème de transfert

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $X(\Omega) \subseteq \mathscr{D}_f$. Alors $Y = f(X)$ est aussi une VAR et :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \times \mathbb{P}(X = x_k)$$

Ce résultat sera très utile en pratique, car dans beaucoup de cas on ne sait pas calculer simplement la loi de la VAR $Y = f(X)$.

On peut aussi écrire la formule de la manière suivante :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \times \mathbb{P}(X = x)$$

Remarque. On a donc :

$$\sum_{y \in f(X(\Omega))} y \times \mathbb{P}(f(X) = y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \times \mathbb{P}(X = x)$$

d'où le nom de « transfert ».

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés distinguables et on note X = Sommes des deux chiffres obtenus. Alors $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ et la loi de probabilité de X est :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$$\mathbb{E}(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \ldots + 12^2 \times \frac{1}{36} = \frac{329}{6}$$

Corollaire 10 – Linéarité de l'espérance (version 1)

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{E}(aX+b)$:

$$\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b$$

En particulier si $a=0$, on a pour tout $b \in \mathbb{R}$: $\mathbb{E}(b)=b$. Et donc pour $b=\mathbb{E}(X)$, on obtient $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X)\big)=\mathbb{E}(X)$, puis $\mathbb{E}\big(X-\mathbb{E}(X)\big)=0$.

Le théorème suivant sera admis.

Théorème 11 – Linéarité de l'espérance (version 2)

Soient X et Y deux VAR, définies sur le même espace de probabilité. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{E}(aX+bY) = a.\mathbb{E}(X)+b.\mathbb{E}(Y)$$

On en déduit deux propriétés fondamentales de l'espérance.

Corollaire 12 – Positivité et croissance de l'espérance

1. Positivité. Si X est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
2. Croissance. Soient X et Y deux VAR, définies sur le même espace de probabilité.
   On suppose que $X \leq Y$ ie que $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$.
   Alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

2.3 Variance d'une variable aléatoire

Définition 13 – Variance d'une variable aléatoire

On appelle *variance* de X, notée $V(X)$ ou $\mathrm{Var}(X)$:

$$V(X) = \mathbb{E}\left[\big(X-\mathbb{E}(X)\big)^2\right]$$

La variance sert à mesurer la dispersion quadratique de X autour de sa valeur moyenne (= son espérance).

Théorème 14 – Règles de calcul de la variance

1. $V(X) \geq 0$;
2. $V(X)=0 \iff X$ est constante.
   Dans ce cas : $X=\mathbb{E}(X)$.
3. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:
   $$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

Théorème 15 – Formule de Koenig-Huyghens

On a :
$$V(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

Puisque $V(X) \geq 0$, on a $\mathbb{E}\left(X^2\right) \geq \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$.
C'est cette formule qu'on utilise en pratique pour calculer la variance d'une VAR.

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés distinguables et on note X = Sommes des deux chiffres obtenus. Alors $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ et la loi de probabilité de X est :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

Donc : $V(X) = \frac{329}{6} - 7^2 = \frac{35}{6}$

Définition 16 – Écart-type d'une VAR

On appelle *écart-type* de X le réel : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Contrairement à la variance, l'écart-type possède la même unité que X, et s'interprète donc mieux en pratique. Il sert à mesurer la dispersion de X autour de sa valeur moyenne.

2.4 Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev

Théorème 17 – Inégalité de Markov

1. Si X est une VAR à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors :
$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$
2. On a :
$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}\left(|X|\right)}{a}$$

✎ ***Exemple.*** Si X est une variable aléatoire, alors :
$$\lim_{a \to +\infty} \mathbb{P}(X > a) = 0$$

On a aussi un résultat plus précis.

Théorème 18 – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On a :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

Cette inégalité confirme l'utilisation de l'écart-type comme mesure de dispersion.

3 Lois usuelles

Dans tout ce paragraphe X est une VAR définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

3.1 Loi uniforme

Définition 19 – VAR de loi uniforme

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ finie et non vide. On dit que X suit la loi uniforme sur A lorsque $X(\Omega) = A$ et :
$$\forall a \in A, \quad \mathbb{P}(X = a) = \frac{1}{\mathrm{Card}(A)}$$
On le note $X \hookrightarrow \mathscr{U}(A)$.

Si $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ avec $n = \mathrm{Card}(A)$, alors : $\forall k \in [\![1, n]\!], \mathbb{P}(X = a_k) = \dfrac{1}{n}$.

Si A est un singleton, $A = \{a\}$, alors X est constante égale à a.

✎ ***Exemple.*** Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1, n]\!]\big)$, alors $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et :
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

Théorème 20 – Espérance et variance d'une VAR de loi $\mathscr{U}\big([\![1, n]\!]\big)$

Soit X une VARD de loi $\mathscr{U}([\![1, n]\!])$. Alors X :
$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

⚠ Ces formules sont fausses si $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![0, n]\!]\big)$.

Modélisation 1 : On choisit au hasard un nombre dans A, partie finie non vide de $\mathbb{R}$. On note X = Nombre obtenu. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}(A)$.

✎ ***Exemple.*** On dispose d'une urne de 10 boules numérotées. On tire une boule au hasard et on note X = Numéro obtenu. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left(\llbracket 1, 10 \rrbracket\right)$.

✎ ***Exemple.*** Un gardien doit ouvrir une porte dans le noir, avec n clef dont une seule est la bonne. On note X le nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef. On suppose que le gardien essaie les clefs une à une, sans utiliser deux fois la même. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left(\llbracket 1, n \rrbracket\right)$ et le nombre moyen d'essais pour trouver la bonne clef est donc $\dfrac{n+1}{2}$.

3.2 Loi de Bernoulli

Définition 21 – VAR de loi de Bernoulli

On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ lorsque $X(\Omega) = \{0,1\}$ et :

$$\mathbb{P}(X=1) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X=0) = 1-p = q$$

On le note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

Théorème 22 – Espérance et variance d'une VAR de loi $\mathscr{B}(p)$

Soit X une VAR de loi $\mathscr{B}(p)$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = p \qquad \text{et} \qquad V(X) = pq = p(1-p)$$

Modélisation : On considère une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles : succès ou échec.

On note p la probabilité qu'elle donne un succès et $X = \begin{cases} 1 & \text{si l'expérience est un succès} \\ 0 & \text{si l'expérience est un échec} \end{cases}$

Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

✎ ***Exemple.*** On dispose d'une pièce de monnaie truquée, de telle sorte qu'elle donne Pile avec probabilité $p \in]0,1[$.

On note $X = \begin{cases} 1 & \text{si la pièce donne Pile} \\ 0 & \text{si la pièce donne Face} \end{cases}$ Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

✎ ***Exemple.*** On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

On note $X = \begin{cases} 1 & \text{si la carte est un coeur} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

Théorème 23 – Caractérisation de la loi de Bernoulli

Soit X une VAR. Alors :

$$X \text{ suit une loi de Bernoulli} \Longleftrightarrow X(\Omega) = \{0,1\}$$

et dans ce cas le paramètre est $p = \mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(X=1)$.

✎ ***Exemple.*** Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, alors $X^2 \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

✎ ***Exemple.*** Si A est un évènement tel que $\mathbb{P}(A) \notin \{0,1\}$, alors $X = \mathbb{1}_A$ est une VAR de loi $\mathscr{B}\big(\mathbb{P}(A)\big)$. En particulier on obtient que $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$, formule qui relie probabilité d'un évènement et espérance d'une VAR.

3.3 Loi binomiale

Définition 24 – VAR de loi binomiale

On dit que X suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ lorsque $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On le note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

On a $\mathscr{B}(1,p) = \mathscr{B}(p)$.

Si $k \in \mathbb{Z}$, $k \notin [\![0,n]\!]$, on a encore $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ puisque $0 = 0$. Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Théorème 25 – Espérance et variance d'une VAR de loi $\mathscr{B}(n,p)$

Soit X une VAR de loi $\mathscr{B}(n,p)$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = np \qquad \text{et} \qquad V(X) = npq = np(1-p)$$

<u>Modélisation</u> : On considère une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles : succès avec probabilité p ou échec avec probabilité $q = 1-p$.
On effectue n répétitions indépendantes de cette même expérience.
On note X = Nombre de succès obtenus.
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

✎ ***Exemple.*** On dispose d'une pièce de monnaie truquée, de telle sorte qu'elle donne Pile avec probabilité $p \in]0,1[$.
On la lance n fois de manières indépendantes.
On note X = Nombre de Piles obtenus.
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

✎ ***Exemple.*** On dispose d'une urne de N boules : N_1 boules blanches et N_2 boules noires.
On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise.
On note X = Nombre de boules blanches obtenues.
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \dfrac{N_1}{N}\right)$.

4 Compétences à acquérir sur ce chapitre

➥ Savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire.
  ✪ Déterminer l'univers image $X(\Omega)$.
  ✪ Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

➥ Savoir calculer l'espérance d'une variable aléatoire.
  ✪ En utilisant la définition et la loi de la variable aléatoire.
  ✪ En utilisant le théorème de transfert et la loi d'une autre variable aléatoire.

➥ Savoir calculer la variance d'une variable aléatoire.
  ✪ Calculer le moment d'odre deux avec le théorème de transfert.
  ✪ Conclure avec la formule de Koenig-Huyghens.

➥ Connaître les lois usuelles et les reconnaître dans la modélisation.
  ✪ Connaître aussi leur espérance et leur variance.

5 Exercices

Lois usuelles

EXERCICE 1. Lois usuelles

Dans chacune des expériences qui suivent, reconnaître la loi de X.

1. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs.
   X = nombre d'objets dans le premier tiroir.
2. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos.
   X = nombre de bosses.
3. Une urne contient 6 boules vertes, 3 boules rouges et 5 boules bleues. On tire successivement et avec remise 10 boules de l'urne.
   X = nombre de boules vertes tirées.
4. On suppose que la probabilité de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques.
   X = nombre de garçons d'une famille de 3 enfants.
5. On suppose que 1% des trèfles possédent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles.
   X = nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.

EXERCICE 2. Transfert de loi

Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left(\llbracket 1, n \rrbracket\right)$ et $Y = X/n$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $V(Y)$. Déterminer la loi de Y.

EXERCICE 3. Une utilisation du théorème de transfert

Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

Calculs de lois par dénombrement

EXERCICE 4. Jeux d'argent

Un jeu est dit *équitable* losque l'espérance du gain relatif du joueur est nulle. Pour chacun des jeux suivants, déterminer si le jeu est équitable.

1. Le joueur lance 2 dès. S'il sort 7, il gagne 5 euros, sinon il perd 1 euro.
2. Le joueur mise sur rouge ou noir à la roulette au casino (composée de 18 rouges, 18 noirs et du zéro qui est vert). Pour une mise donnée, la casino paye deux fois la mise en cas de sortie de la bonne couleur (la mise est perdue dans tous les cas).
3. Toujours à la roulette, il joue un numéro plein : s'il gagne, la casino lui paye 36 fois sa mise en cas de sortie du numéro choisi.
4. Le joueur remplit une grille de loto qui coûte ϵ euros : il choisit 6 numéros entre 1 et 49. Si ses numéros sortent, il gagne un million d'euros.

EXERCICE 5. Somme des numéros

Une urne contient deux boules marquées 1, deux marquées 2 et une marquée 3. On prélève simultanément deux boules au hasard et on appelle X la somme des numéros marqués sur les deux boules. Déterminer la loi de X son espérance et son écart-type.

EXERCICE 6. Les quatre dés

On lance 4 dès équilibrés, on note X ="le nombre de numéros différents sortis".

1. Vérifier que la loi de X est la suivante :

k	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$1/216$	$35/216$	$120/216$	$60/216$

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

EXERCICE 7. Plus grand numéro obtenu lors d'un tirage simultané

On effectue un tirage simultané de n boules dans une urne composée de N boules numérotées de 1 à N. On note X le plus grand des numéros obtenus.

1. Reconnaître la loi de X si $n=1$.
2. Vérifier que $X(\Omega)=[\![n,N]\!]$ et que pour tout $k\in[\![n,N]\!]$:

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$$

3. Démontrer que pour tout $n\in[\![0,N]\!]$: $\displaystyle\sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n}=\binom{N+1}{n+1}$, et en déduire $\mathbb{E}(X)$.
4. Calculer $V(X)$.

EXERCICE 8. Loi hypergéométrique

1. On dispose d'une urne de N boules : N_1 boules blanches et N_2 boules noires.
   On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise.
   On note X = Nombre de boules blanches obtenues.
   Déterminer la loi de X.
2. On dispose d'une urne de N boules : N_1 boules blanches et N_2 boules noires.
   On effectue n tirages successifs d'une boule sans remise.
   On note X = Nombre de boules blanches obtenues.
   Déterminer la loi de X.

3. On dispose d'une urne de N boules : N_1 boules blanches et N_2 boules noires.
   On effectue un tirage simultané de n boules.
   On note X = Nombre de boules blanches obtenues.
   Déterminer la loi de X.

Calculs de lois par conditionnement

EXERCICE 9. Urne vidée de ses boules blanches

On considère une urne de taille $N > 1$, contenant r boules blanches et $N - r$ boules noires ($0 < r < N$). Dans cette urne, on prélève les boules une à une et sans remise, jusqu'à l'obtention de toutes les boules blanches, et on note X le nombre de tirages qu'il est nécessaire d'effectuer pour cela.

1. Dans les cas $r = 1$ et $r = N$, reconnaître la loi de X et donner son espérance.
2. Le cas général : $1 < r < N$.
   (a) Déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ et pour $k \in X(\Omega)$ vérifier que : $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}$
   (b) Montrer que : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{r(N+1)}{r+1}$.

EXERCICE 10. n-ième succès lors de tirages sans remise

Une urne contient $N \geq 1$ boules dont $r \geq 1$ sont rouges et les autres sont blanches. On tire successivement et sans remise toutes les boules. Soit $n \in [\![1, r]\!]$. On appelle X_n le rang d'apparition de la $n^{\text{ème}}$ boule rouge. Trouver la loi de X_n.
Faire le lien avec l'exercice précédent.

EXERCICE 11. Modèle de Galton-Watson

Soit $p \in]0, 1[$.
On considère une plante qui peut donner naissance à deux descendants avec la probabilité p, ou à aucun descendant avec la probabilité $1 - p$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de descendants issus de la $n^{\text{ème}}$ génération, c'est-à-dire le nombre de descendants de notre plante à la $(n+1)^{\text{ème}}$ génération.
On note aussi f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = px^2 + (1 - p)$.

1. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1 - p$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$ Montrer qu'elle est bien définie, puis étudier sa monotonie et sa convergence.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une relation entre $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = 0)$.
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$. Interpréter ce résultat.

Plusieurs variables aléatoires

EXERCICE 12. Exemple de couple discret

On choisit au hasard un nombre X entre 1 et n. On choisit alors au hasard avec équiprobabilité un entier Y entre 1 et X.

1. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, déterminer $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$.
2. Donner la loi de Y.

EXERCICE 13. Minimum et maximum lors de tirages simultanés

On considère une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N. On tire simultanément n jetons de l'urne ($n < N$) et on note X le plus petit des numéros obtenus et Y le plus grand.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Pour $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, déterminer $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$.

EXERCICE 14. Expérience en deux étapes

On dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ urnes numérotées de 1 à n : $U_1, U_2, \dots, U_n$. L'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une urne, on note X le numéro de l'urne choisie, puis on tire une boule au hasard dans l'urne choisie, on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, déterminer $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$, en déduire la loi de Y.
2. Déterminer l'espérance de Y.
3. Donner un équivalent de $\mathbb{E}(Y)$ lorsque $n \to +\infty$.

Un peu de théorie

EXERCICE 15. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On effectue n lancers indépendants d'une pièce équilibrée. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer le nombre de lancers nécessaires pour que la fréquence empirique du nombre de "Piles" obtenus se situe dans l'intervalle $]1/2 - 0.01, 1/2 + 0.01[$, avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

EXERCICE 16. Théorème d'antirépartition

1. Soient $N \in \mathbb{N}$ et X une VAR vérifiant : $X(\Omega) \subset [\![0, N]\!]$.
   Montrer que : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > k)$.
2. On considère une urne de N boules numérotées. On effectue un tirage simultané de n boules, et on note X le plus grand numéro obtenu. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

EXERCICE 17. Entropie de la loi d'une variable aléatoire discrète

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \begin{cases} -x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Soit Ω un univers fini et X une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On appelle entropie de la loi de X le réel, noté $H(X)$, défini par :

$$H(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} f\big(\mathbb{P}(X = x)\big)$$

On pose aussi $N = \mathrm{Card}\big(X(\Omega)\big)$.

1. Déterminer $H(X)$ lorsque X suit une loi uniforme. Même question lorsque X est constante.
2. Dans le cas général, déterminer le signe de $H(X)$.
3. Etudier le signe sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $h(x) = f(x) - 1 + x$. En déduire le signe du réel : $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} f\big(N \times \mathbb{P}(X = x)\big)$, puis l'inégalité : $H(X) \leq \ln N$.
4. Etablir que l'entropie est minimale si, et seulement si, X est constante.
5. Etablir que l'entropie est maximale si, et seulement si, X suit une loi uniforme.

EXERCICE 18. Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire sur un univers Ω supposé fini, et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice de X la fonction $G_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \sum_{k\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k).t^k$$

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, exprimer $\mathbb{E}(t^X)$ en fonction de G_X.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\mathbb{E}\big(X(X-1)\dots(X-n+2)(X-n+1)\big)$ en fonction de G_X ou de ses dérivées.
3. Montrer que la fonction génératrice de X caractérise la loi de X.
4. Relier $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$ à G_X et G'_X.
5. Déterminer G_X dans les cas suivants : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(N,p)$ et $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1,N]\!]\big)$.