dem th 26

1. Soit $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ famille de vecteurs de $\mathbb{E}$.

On se donne $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{E}$ et on pose

$A = \mathrm{Mat}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p} ; \mathcal{B})$.

On note $n = \dim(\mathbb{E})$.

L'application $\varphi : \mathbb{E} \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$\vec{x} \longmapsto \varphi(\vec{x}) = \mathrm{Mat}(\vec{x} ; \mathcal{B})$

est un isomorphisme de $\mathbb{E}$ vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Alors φ induit un isomorphisme de $\mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ vers $\varphi(\mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})) \overset{\text{chap 17}}{=} \mathrm{Vect}(\varphi(\vec{u_1}), \dots, \varphi(\vec{u_p}))$.

Donc $\dim(\mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})) = \dim(\mathrm{Vect}(\varphi(\vec{u_1}), \dots, \varphi(\vec{u_p})))$

ie $\mathrm{rg}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}) = \mathrm{rg}(\varphi(\vec{u_1}), \dots, \varphi(\vec{u_p}))$

Mais $\varphi(\vec{u_1}), \dots, \varphi(\vec{u_p})$ sont les colonnes de A donc

par def : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\varphi(\vec{u_1}), \dots, \varphi(\vec{u_p}))$.

Ainsi $\mathrm{rg}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}) = \mathrm{rg}(A)$.

2. On suppose $f : E \longrightarrow F$ linéaire.

On se donne $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$ une base de E et $\mathcal{E} = (\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_n})$ une base de F.

On note $A = \mathrm{Mat}(f ; \mathcal{B}, \mathcal{E})$.

Par déf : $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$

Or puisque $\mathcal{B}$ est une base de E on a :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(\vec{e_1}), \dots, f(\vec{e_p}))$$

On a donc $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Vect}(f(\vec{e_1}), \dots, f(\vec{e_p})))$

$$= \mathrm{rg}(f(\vec{e_1}), \dots, f(\vec{e_p}))$$

Or on a $A = \mathrm{Mat}(f ; \mathcal{B}, \mathcal{E}) = \mathrm{Mat}(f(\vec{e_1}), \dots, f(\vec{e_p}) ; \mathcal{E})$

donc d'après 1. on a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f(\vec{e_1}), \dots, f(\vec{e_p}))$

Ainsi $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f)$.

3. C'est le th 25.

<u>dem th 27</u> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

On a :

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible} &\overset{\text{th 12}}{\iff} f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{K}^n \\ &\overset{\text{chap 17}}{\iff} \operatorname{rg}(f) = n \\ &\overset{\text{th 26}}{\iff} \operatorname{rg}(A) = n \end{aligned}$$

Exemple 1 $\quad \vec{u_1} = (1,1,1)$

$\vec{u_2} = (1,-1,1)$

$\vec{u_3} = (-1,-1,1)$

On note $\mathcal{B}_{cano}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et

$$M = \mathrm{Mat}(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3} ; \mathcal{B}_{cano}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

donc $\mathrm{rg}(M) = 3$

Comme $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: M est inversible.

Donc $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (cc13).

dem th 28 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On note $f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ l'application linéaire canoniquement associée.

Alors $\dim(\mathbb{K}^p) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$

Or d'après le th 26 on a $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$

On note $\mathcal{B}_{cano}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}^p &\longrightarrow \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ \vec{x} &\longmapsto \mathrm{Mat}(\vec{x}, \mathcal{B}_{cano}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}^p$ vers $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$

φ induit aussi un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(f)$ vers $\mathrm{Ker}(A)$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(A))$.

Ainsi : $p = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A)$.