<u>dem th 29</u> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ l'endomorphisme canoniquement associé.

* (i) $\Longrightarrow$ (ii) : évident

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : si A inversible à gauche alors $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$. Si on note g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à B alors $g \circ f = id_{\mathbb{K}^n}$.

Donc f est injectif. Comme f est un endomorphisme en dimension finie : il est bijectif.

Donc A est inversible (th 12).

Donc $\boxed{\text{(i)} \Longleftrightarrow \text{(ii)}}$

* (i) $\Longrightarrow$ (iii) : évident

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : si A est inversible à droite alors $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$. Si on note g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à B alors $f \circ g = id_{\mathbb{K}^n}$. Donc f est surjective. Comme f est un endomorphisme en dimension finie : il est bijectif. Donc A est inversible (th 12).

Donc $\boxed{\text{(i)} \Longleftrightarrow \text{(iii)}}$

* $\boxed{\text{(i)} \Longleftrightarrow \text{(iv)}}$ C'est le th 27.

* (i) $\Longrightarrow$ (v) : Soit R l'unique matrice échelonnée réduite vérifiant $A \underset{L}{\sim} R$.

Comme A est inversible : $rg(A) = n$ (th 27).

Donc $rg(R) = n$ (th 22).

Comme R est carrée d'ordre n et est échelonnée réduite :

$$R = I_n.$$

Donc $A \underset{L}{\sim} I_n$.

(v) $\Longrightarrow$ (i) : On suppose que $A \underset{L}{\sim} I_n$.

Il existe alors E produit de matrices élémentaires telle que $A = E \times I_n = E$

E est inversible car elle est un produit de matrices inversibles.

Donc A est inversible.

Donc $\boxed{(i) \Longleftrightarrow (v)}$

* $\boxed{(i) \Longleftrightarrow (vi) \Longleftrightarrow (vii) \Longleftrightarrow (viii)}$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.

On a : A inversible $\overset{th 12}{\Longleftrightarrow}$ f est bijectif

$\Longleftrightarrow$ f est injectif

$\Longleftrightarrow$ f est surjectif

ce qui donne :

(i) $\Longleftrightarrow$ (viii) $\Longleftrightarrow$ (vi) $\Longleftrightarrow$ (vii)

* $\boxed{\text{(i)} \Longleftrightarrow \text{(ix)}}$ C'est le cor 13 en se plaçant dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

* $\boxed{\text{(i)} \Longleftrightarrow \text{(x)}}$ A est inversible $\Longleftrightarrow$ ${}^tA$ est inversible

$\Longleftrightarrow$ les colonnes de ${}^tA$ forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

$\Longleftrightarrow$ les lignes de A forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

* $\boxed{\text{(i)} \Longleftrightarrow \text{(xi)}}$ C'est le th 12.