<u>dem lemme 53</u> : Soit $f : E \longrightarrow E$ endomorphisme de E.

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

Si on pose $P \overset{\text{def}}{=} P_{\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'}$ alors :

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = P \times \underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}(f) \times P^{-1}$$

et donc d'après le cor 46 :

$$\det\left(\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)\right) = \det\left(\underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}(f)\right)$$

<u>Exemple 1</u> : Si $\mathcal{B}$ est n'importe quelle base de E

on a vu que $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(id_E) = I_n$ où $n = \dim(E)$

Donc $\det(id_E) = \det(\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(id_E)) = \det(I_n) = 1$.

<u>Exemple 2</u> : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mathcal{B}$ une base de E.

On a $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\lambda . id_E) = \lambda . \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(id_E) = \lambda . I_n$ où $n = \dim E$

donc $\det(\lambda . id_E) = \det(\lambda . I_n) = \lambda^n \times \det(I_n) = \lambda^n \times 1$

donc $\det(\lambda . id_E) = \lambda^{\dim(E)}$

Exemple 3 Soit p un projecteur de E tq $p \neq id_E$.

On a $E = Ker(p) \oplus Im(p)$ avec $Ker(p) \neq \{0_E\}$.

Soient $\mathcal{B}_1$ une base de $Ker(p)$ et $\mathcal{B}_2$ une base de $Im(p)$.

Alors leur concaténation notée $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$ est une base $\mathcal{B}$ de E et :

$$\underset{\mathcal{B}}{Mat}(p) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} M$$

M est diagonale. Le nombre de zéros sur sa diagonale est égal à $\dim(Ker(p)) \geq 1$

donc $\det(p) = \det(M) = 0 \times \dots \times 0 \times 1 \times \dots \times 1 = 0$

Exemple 4 On suppose que $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ et que s est la symétrie par rapport à $\mathbb{F}$ et parallèlement à $\mathbb{G}$.

Alors $\mathbb{F} = \mathrm{Ker}(s - id_E)$ et $\mathbb{G} = \mathrm{Ker}(s + id_E)$

Si on choisit $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{E}$ adaptée à cette ~~somme~~ somme directe alors :

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} S.$$

S est diagonale. Le nombre de 1 sur la diagonale est égal à $\dim(\mathbb{F}) = \dim(\mathrm{Ker}(s - id_E))$ et le nombre de -1 est égal à $\dim(\mathbb{G}) = \dim(\mathrm{Ker}(s + id_E))$.

Donc $\det(s) = \det(S) = (-1)^{\dim(\mathrm{Ker}(s+id))}$

dem th 55 Soient f, g endomorphismes de $\mathbb{E}$ et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{E}$.

1. On a $\mathrm{Mat}(g \circ f ; \mathcal{B}) \overset{th10}{=} \mathrm{Mat}(g ; \mathcal{B}) \times \mathrm{Mat}(f ; \mathcal{B})$

donc $\det(\mathrm{Mat}(g \circ f ; \mathcal{B})) \overset{th44}{=} \det(\mathrm{Mat}(g ; \mathcal{B})) \times \det(\mathrm{Mat}(f ; \mathcal{B}))$

ie $\det(g \circ f) = \det(g) \times \det(f)$

$= \det(f) \times \det(g) = \det(f \circ g)$

2. f est un automorphisme de $\mathbb{E}$

$\overset{th12}{\iff} \mathrm{Mat}(f ; \mathcal{B})$ est inversible

$\overset{th41}{\iff} \det(\mathrm{Mat}(f ; \mathcal{B})) \neq 0$

$\iff \det(f) \neq 0$

~~Dans~~ dans ce cas d'après le th 12 :

$\mathrm{Mat}(f^{-1} ; \mathcal{B}) = (\mathrm{Mat}(f ; \mathcal{B}))^{-1}$

donc $\det(\mathrm{Mat}(f^{-1} ; \mathcal{B})) = \dfrac{1}{\det(\mathrm{Mat}(f ; \mathcal{B}))}$ d'après le cor 45.

ie $\det(f^{-1}) = 1 / \det(f)$.