dem th 41 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que A est inversible.

Alors $A \underset{L}{\sim} I_n$.

Il existe donc $E_1, \dots, E_k$ matrices d'opérations élémentaires sur les lignes telles que :

$$A = E_1 \times \dots \times E_k \times I_n = E_1 \times \dots \times E_k.$$

On a donc $\det(A) = \det(E_1 \times \dots \times E_{k-1} \times E_k)$

$$= \det(E_1 \times \dots \times E_{k-1}) \times \det(E_k)$$

$$= \dots$$

$$= \det(E_1) \times \det(E_2) \times \dots \times \det(E_k)$$

D'après le lemme précédent : $\det(A) \neq 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Par contraposée : on suppose A non inversible.

On sait qu'il existe R matrice échelonnée réduite par colonnes et $E = E_1 \times \dots \times E_k$ matrice produit de matrices d'opérations élémentaires telles que : $A = R \times E$.

D'après le lemme $\det(A) = \det(R) \times \det(E)$

Comme A n'est pas inversible : $rg(A) < n$

Comme $A \underset{L}{\sim} R$ on a $rg(R) = rg(A)$ donc $rg(R) < n$.

Comme R est échelonnée réduite par colonnes, la dernière colonne de R est nulle.

D'après la prop 37 : $\det(R) = 0$.

Donc $\det(A) = 0$

dem th 43 Soit $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n})$ famille de vecteurs de $\mathbb{E}$ où $n = \dim(\mathbb{E})$.

$\boxed{\Rightarrow}$ On se donne $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ une base de $\mathbb{E}$ et

on suppose que $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n})$ est une base de $\mathbb{E}$.

Alors $\mathrm{Mat}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}; \mathcal{B})$ est inversible d'après le th 12.

D'après le th 41 :

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}) \overset{\text{def}}{=} \det\left(\mathrm{Mat}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}; \mathcal{B})\right) \neq 0$$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose qu'il existe $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ base de $\mathbb{E}$ telle que $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}) \neq 0$

D'après le th 41 : $\mathrm{Mat}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}; \mathcal{B})$ est inversible.

D'après le th 12 : $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n})$ est une base de $\mathbb{E}$.

Exemple 1 On note $\mathcal{B}_{cano}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On pose $\vec{u_1} = (1,2,3)$

$\vec{u_2} = (2,3,1)$

$\vec{u_3} = (3,2,1)$

On a
$$\det_{\mathcal{B}_{cano}}(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -5 & -8 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$$

$$= 12 \neq 0$$

Donc $(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

dem Th 44 Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Cas 1 si B n'est pas inversible.

Alors $Ker(B) \neq \{0_{n,1}\}$

donc $\exists X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tq $X_0 \neq 0_{n,1}$ et $BX_0 = 0_{n,1}$

On a alors $ABX_0 = A \times 0_{n,1} = 0_{n,1}$

donc $X_0 \in Ker(AB)$.

Donc $Ker(AB) \neq \{0_{n,1}\}$ et donc AB n'est pas inversible.

D'après le th 41 : $det(AB) = 0 = det(B)$

Donc $det(AB) = det(A) \times det(B)$.

Cas 2 si B est inversible.

Alors $B \sim I_n$ donc il existe $E_1, \ldots, E_k$ matrices d'opérations élémentaires telles que $B = E_1 \times \cdots \times E_k$.

Donc $AB = A \times E_1 \times \cdots \times E_k$

En appliquant en cascade le lemme 40 :

$det(AB) = det(A) \times det(E_1) \times \cdots \times det(E_k) = det(A) \times det(B)$

Rem: $det(A) \times det(B) = det(B) \times det(A)$

donc $det(AB) = det(BA)$

<u>dem cor 45</u> On suppose $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

Alors $AA^{-1} = I_n$

D'après le th 43 : $\det(A) \times \det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$

Donc $\det(A) \neq 0$ (on le savait d'après le th 41)

et $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

dem cor 46

1. Par récurrence immédiate

2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$:

$$\det(PAP^{-1}) = \det(P) \times \det(A) \times \det(P^{-1}) \quad (\text{th } 44)$$

$$= \det(P) \times \det(A) \times \frac{1}{\det(P)} \quad (\text{cor } 45)$$

$$= \det(A)$$

dem th47 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Cas 1 A non inversible. Alors ${}^tA$ non inversible.

Donc $\det(A) = 0 = \det({}^tA)$ (th41)

Cas 2 A inversible. Alors A est un produit de matrices d'opérations élémentaires sur les lignes : $A = E_1 \times \dots \times E_k$

D'après le th44 : $\det(A) = \det(E_1) \times \dots \times \det(E_k)$

De plus ${}^tA = {}^tE_k \times \dots \times {}^tE_1$

donc $\det({}^tA) = \det({}^tE_k) \times \dots \times \det({}^tE_1)$

$= \det({}^tE_1) \times \dots \times \det({}^tE_k)$

Or si E est une matrice d'opération élémentaire sur les lignes :

* si E est une matrice de transvection alors ${}^tE$ l'est aussi donc $\det(E) = 1 = \det({}^tE)$

* si E est une matrice de permutation alors ${}^tE = E$ donc $\det(E) = \det({}^tE)$

* si E est une matrice de dilatations alors ${}^tE = E$ donc $\det(E) = \det({}^tE)$

Donc $\det({}^tA) = \det(E_1) \times \dots \times \det(E_k) = \det(A)$