Déf 49 Soient $A=((a_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$.

$$\Delta_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & \cancel{a_{1,j}} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \cancel{\vdots} & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cancel{a_{i-1,j}} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \cancel{a_{i,1}} & \cancel{a_{i,2}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{i,j-1}} & \cancel{a_{i,j}} & \cancel{a_{i,j+1}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{i,n}} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & \cancel{a_{i+1,j}} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \cancel{\vdots} & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & \cancel{a_{n,j}} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Par exemple si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ alors $\Delta_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$

<u>dem lemme 50</u> Soit $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note f l'application définie sur $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$\forall B = ((b_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}), \quad f(B) = \begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

On voit facilement que f est multilinéaire antisymétrique et que $f(I_{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

car c'est le déterminant d'une matrice triangulaire.

Par unicité, f est l'application déterminant d'ordre $n-1$:

$$\forall B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}), \quad f(B) = \det(B)$$

Donc $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$

<u>dem th 51</u> Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $j \in [\![1,n]\!]$.

On note $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$

et on pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dots$, $E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors la j-ième colonne de A est :

$$a_{1,j} \cdot E_1 + a_{2,j} \cdot E_2 + \dots + a_n \cdot E_{n,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot E_i$$

Par linéarité par rapport à la j-ième colonne :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \times \begin{array}{c} \text{j-ième colonne} \\ \downarrow \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & 0 & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & 1 & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{i-ième ligne} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \times (-1)^{n-j} \times \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \underbrace{a_{n,1} \quad \dots \quad a_{n,n}}_{\text{A sans sa j-ième colonne}} & & & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{i-ième ligne} \\ \\ \\ \end{array}$$

Donc :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \times (-1)^{n-j} \times (-1)^{n-i} \times \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}\text{A sans sa i-ième} \\ \text{ligne et sa} \\ \text{j-ième colonne}\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \underbrace{a_{i,1} \cdots\cdots a_{i,n}}_{\substack{\text{i-ième ligne de} \\ \text{A sans } a_{ij}}} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Donc } \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \times (-1)^{i+j} \times \Delta_{ij}$$

d'après le th 47 et le lemme 50.

Exemple 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + 6(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + 9(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3\times(32-35) - 6\times(8-14) + 9\times(5-8)$$

$$= -9 + 36 - 27 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 4(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + 6(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= -4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -4(18-24) + 5(9-21) - 6(8-14)$$

$$= 24 - 60 + 36 = 0$$

Exemple 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

On a en effectuant $L_1 \leftarrow L_1 + L_n$:

$$D_n = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

puis en effectuant $C_1 \leftarrow C_1 + C_n$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première ligne :

$$D_n = 0 + \cdots + 0 + (-1)^{n+1} \times (+1) \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

puis par rapport à la première colonne :

$$D_n = (-1)^{n+1} \times \left(0 + \cdots + 0 + (-1)^{1+n-1} \times (-1) \times D_{n-2} \right)$$

Donc $D_n = D_{n-2}$

Or $D_1 = 0$ et $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1$

Donc $D_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$