dem prop 37 :

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont une colonne est nulle.

Soient $C_1, \ldots, C_n$ les matrices colonnes de A.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $C_j = 0_{n,1}$.

On a $0_{n,1} = 0 . 0_{n,1}$ donc par linéarité par rapport à la j-ième variable :

$$\det(C_1, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-ième variable}}}{0_{n,1}}, \ldots, C_n) = \det(C_1, \ldots, \overset{\substack{j\text{-ième variable} \\ \downarrow}}{0 . 0_{n,1}}, \ldots, C_n)$$

$$= 0 \times \det(C_1, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-ième variable}}}{0_{n,1}}, \ldots, C_n) = 0$$

2. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note $C_1, \ldots, C_n$ les matrices colonnes de A.

Alors les colonnes de $\lambda . A$ sont $\lambda . C_1, \ldots, \lambda . C_n$.

Par multilinéarité :

$$\det(\lambda . A) = \det(\lambda . C_1, \ldots, \lambda . C_n)$$

$$= \underbrace{\lambda \times \lambda \times \ldots \times \lambda}_{n \text{ fois}} \times \det(C_1, \ldots, C_n) = \lambda^n \times \det(C_1, \ldots, C_n)$$

$$= \lambda^n \times \det(A)$$

3. C'est la définition d'une application alternée.

dem prop 38 :

1. C'est la définition d'une application antisymétrique.

2. C'est une simple conséquence de la multilinéarité.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note $C_1, \dots, C_n$ ses matrices colonnes.

Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ tq $i \neq j$.

$$\det(C_1, \dots, \underbrace{C_i + \alpha C_j}_{i\text{-ième variable}}, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, \underbrace{C_i}_{i\text{-ième variable}}, \dots, C_n) + \alpha . \det(C_1, \dots, \underbrace{C_j}_{i\text{-ième variable}}, \dots, \underbrace{C_j}_{j\text{-ième variable}}, \dots, C_n)$$

$$= \det(A) + \alpha \times 0$$

$$= \det(A)$$

Remarque : Si $\mu \neq 0$

$$\det(C_1, \dots, \underbrace{\mu C_i + \alpha C_j}_{i\text{-ième variable}}, \dots, C_n) = \mu \times \det(C_1, \dots, \underbrace{C_i + \frac{\alpha}{\mu} C_j}_{i\text{-ième variable}}, \dots, C_n)$$

$$= \mu \times \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$$

Donc

$$\det(A) = \frac{1}{\mu} \times \det(C_1, \dots, \underbrace{\mu C_i + \alpha C_j}_{i\text{-ième variable}}, \dots, C_n)$$

<u>Exemple 1</u> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note $C_1, \dots, C_n$ ses matrices colonnes.

On note $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont les colonnes sont $C_n, C_{n-1}, \dots, C_2, C_1$.

On veut par échange successifs de 2 colonnes passer de B à A.

<u>méthode 1</u> On effectue
$$\begin{aligned} C_1 &\longleftrightarrow C_n \\ C_2 &\longleftrightarrow C_{n-1} \\ C_3 &\longleftrightarrow C_{n-2} \\ &\vdots \\ C_{\lfloor n/2 \rfloor} &\longleftrightarrow C_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor + 1} \end{aligned}$$

On effectue $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ échanges donc comme le déterminant est antisymétrique :
$$\det(B) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times \det(A)$$

<u>méthode 2</u> On passe de $B = (C_n, C_{n-1}, \dots, C_1)$ à $(C_{n-1}, C_{n-2}, \dots, C_1, C_n)$

avec les échanges
$$\begin{aligned} C_1 &\longleftrightarrow C_2 \\ C_2 &\longleftrightarrow C_3 \\ &\vdots \\ C_{n-1} &\longleftrightarrow C_n \end{aligned}$$

puis on passe à $(C_{n-2}, \dots, C_2, C_1, C_{n-1}, C_n)$ avec
$$\begin{aligned} C_1 &\longleftrightarrow C_2 \\ C_2 &\longleftrightarrow C_3 \\ &\vdots \\ C_{n-2} &\longleftrightarrow C_{n-1} \end{aligned}$$

etc...

finalement on passe de $(C_2, C_1, C_3, \dots, C_{n-1}, C_n)$ à A

avec $C_1 \longleftrightarrow C_2$.

Au total on a effectué :

$(n-1)+(n-2)+\dots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$ échanges.

Comme le déterminant est antisymétrique :

$$\det(B)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \times \det(A)$$

<u>Remarque</u> : Est-ce que les deux formules sont les mêmes ?

Oui si $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $\frac{n(n-1)}{2}$ ont la même parité.

* si n pair : $n=2k$ où $k\in\mathbb{N}$.

$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = k$ et $\frac{n(n-1)}{2} = k\times(2k-1)$

Comme $2k-1$ est impair, k et $k(2k-1)$ ont la même parité.

* si n impair : $n=2k+1$ où $k\in\mathbb{N}$

$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor k+\frac{1}{2} \rfloor = k$ et $\frac{n(n-1)}{2} = k\times(2k+1)$

Comme $2k+1$ est impair, k et $k(2k+1)$ ont la même parité.

Donc oui $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $\frac{n(n-1)}{2}$ ont la même parité.

<u>dem prop 39</u> On fait la preuve dans le cas où $A = ((a_{i,j}))_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} \times 1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{1,1} \times 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{1,1} \times 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,1} \times 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1,1} \times \begin{vmatrix} 1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$ par linéarité par rapport à la 1ère colonne

On utilise l'algorithme de Gauss sur les colonnes pour se ramener à I_n.

On effectue les opérations
$$C_2 \leftarrow C_2 - a_{1,2} C_1$$
$$C_3 \leftarrow C_3 - a_{1,3} C_1$$
$$\vdots$$
$$C_n \leftarrow C_n - a_{1,n} C_1$$

qui ne changent pas la valeur de $\det(A)$.

$$\det(A) = a_{1,1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1,1} \times \begin{vmatrix} 1 & a_{2,2} \times 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} \times 1 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & a_{2,2} \times 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2,2} \times 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1,1} \times a_{2,2} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

par linéarité par rapport à la 2nde colonne

En continuant l'algorithme on arrive à :

$$\det(A) = a_{1,1} \times a_{2,2} \times \cdots \times a_{n,n} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a_{1,1} \times a_{2,2} \times \cdots \times a_{n,n} \times \det(I_n)$$

$$= a_{1,1} \times a_{2,2} \times \cdots \times a_{n,n}$$

Exemple 2

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{matrix}$$

$$= 1^3 = 1$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftrightarrow C_2$$

$$= - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$$

$$= -\frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times (-8) = 32$$

__Exemple 3__ Soit $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

On veut calculer

$$D(a) = \underbrace{\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}}_{n \text{ colonnes}}$$

Comme n et a sont quelconques il n'est pas raisonnable d'appliquer machinalement l'algorithme de Gauss.

On va utiliser une astuce assez fréquente.

* On remarque que sur la chaque ligne la somme des coefficients donne toujours le même résultat (ici $a+n-1$).
* On effectue donc l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$ qui ne modifie la valeur du déterminant.
  On se retrouve avec une première colonne dont tous les coefficients sont égaux (ici à $a+n-1$).
* Par linéarité par rapport à la 1ère colonne elle devient $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et là on peut effectuer une étape

de l'algorithme de Gauss pour se ramener à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Concrètement après l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$:

$$D(a) = \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a+n-1 & a & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a+n-1 & 1 & \dots & a & 1 \\ a+n-1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+n-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$

par linéarité p/r à la 1ère colonne

$$= (a+n-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$\vdots$
$L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_1$
$L_n \leftarrow L_n - L_1$

$$= (a+n-1) \times (a-1)^{n-1}$$

car c'est le déterminant d'une matrice triangulaire.

<u>Vérif</u> : Pour $n = 2$ on trouve $D(a) = a^2 - 1$ et $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$. $\boxed{\text{OK}}$