Exemple 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

On note $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de A.

Par définition : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_n)$
$= \dim(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n))$

Comme $C_1, \dots, C_n$ sont des matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ l'ensemble $\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n)$ est un sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Or on a $C_1 = C_n$
$C_2 = C_3 = \dots = C_{n-1}$

Donc $\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2)$.

Comme C_1 et C_2 sont non colinéaires, la famille (C_1, C_2) est libre et est donc une base de $\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n)$.

Ainsi $\dim(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n)) = \mathrm{Card}(C_1, C_2) = 2$

Donc $\mathrm{rg}(A) = 2$.

<u>En résumé</u> : A n'a que deux colonnes distinctes et elles sont non proportionnelles, donc $\mathrm{rg}(A) = 2$.

<u>dem th 21</u> : On suppose que $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On note $C_1, \dots, C_p$ ses colonnes. Ce sont des matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

On note aussi $f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ l'application linéaire canoniquement associée à A.

Si on note $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$, les colonnes de A donnent donc les coordonnés des vecteurs $(f(\vec{e_1}), \dots, f(\vec{e_p}))$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Or dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ les coordonnées sont égales aux composantes. On a donc :

$$\begin{cases} f(\vec{e_1}) = {}^tC_1 \\ f(\vec{e_2}) = {}^tC_2 \\ \quad\vdots \\ f(\vec{e_p}) = {}^tC_p \end{cases}$$

Si $I \subseteq [\![1, p]\!]$ est tel que $(C_i)_{i \in I}$ est une base de $\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ alors $({}^tC_i)_{i \in I}$ est une base de $\mathrm{Vect}(f(\vec{e_1}), \dots, f(\vec{e_p}))$.

On a donc :

$$\dim\left(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}(f(\vec{e_1}), \dots, f(\vec{e_p}))\right)$$

Or $\dim\left(\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)\right) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{rg}(A)$.

Et comme $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_p})$ est une base de $\mathbb{K}^p$ on a

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(\vec{e_1}), \ldots, f(\vec{e_p})\right)$

donc $\mathrm{rg}(f) \overset{\text{def}}{=} \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(f(\vec{e_1}), \ldots, f(\vec{e_p})\right)\right)$

On a donc $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$.

dem Th 22

1. On se donne $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

but $rg(A) \leq \min(n,p)$

On note $f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ l'application linéaire canoniquement associée à A.

D'après le th 21 : $rg(A) = rg(f)$.

Or on sait que $rg(f) \leq \min(\dim(\mathbb{K}^p); \dim(\mathbb{K}^n))$

ie $rg(f) \leq \min(p; n)$

Donc $rg(A) \leq \min(n,p)$

2. On se donne encore $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et on note $f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ l'application linéaire canoniquement associée.

* On suppose que $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et on note $g : \mathbb{K}^q \longrightarrow \mathbb{K}^p$ l'application linéaire canoniquement associée.

D'après le th 10, $f \circ g : \mathbb{K}^q \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice AB.

On a donc $rg(f) = rg(A)$

$rg(g) = rg(B)$

$rg(f \circ g) = rg(AB)$

Or on sait que $rg(f \circ g) \leq \min(rg(f); rg(g))$

Donc $rg(A \times B) \leq \min(rg(A); rg(B))$

* On suppose que $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible.

On note $h : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ l'endomorphisme canoniquement associé. Comme C est inversible, h est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$ (d'après le th 12).

On sait que $rg(h \circ f) = rg(f)$

Comme $h \circ f$ est l'application linéaire canoniquement associée à CA (th 10) on a :

$$rg(CA) = rg(A)$$

* On suppose que $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est inversible.

De même, l'endomorphisme $g : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^p$ canoniquement associé est un automorphisme donc :

$$rg(f \circ g) = rg(f)$$

ie $rg(AB) = rg(A)$

3. * Soient A et A' deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telles que $A \underset{L}{\sim} A'$.

Alors il existe $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que

$A = E \times A'$ (E est un produit de matrices d'opérations élémentaires)

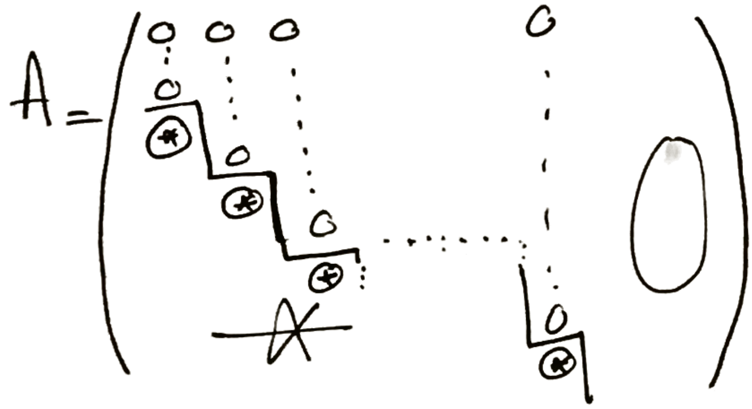
On a donc $rg(A) = rg(A')$.

* Si on suppose que $A \underset{C}{\sim} A'$ alors il existe $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\begin{cases} A = A' \times E \\ E \text{ inversible} \end{cases}$.

Donc $rg(A) = rg(A')$

dem th 23

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est échelonnée par colonnes :



Les colonnes non nulles engendrent $\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ où $C_1, \dots, C_p$ sont les colonnes de A.

De plus les colonnes non nulles sont de coordonnées échelonnées dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, elles forment donc une famille libre et donc une base de $\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.

Ainsi :

$$\mathrm{rg}(A) = \dim\left(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)\right) = \text{nb de colonnes non nulles de } A$$
$$= \text{nb de pivots de } A$$

Exemple 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1 \end{array}$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_3 \leftarrow -2C_3 + C_2$$

$$= 2$$

⚠ aux notations

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mais

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

dem th 25 Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$\mathrm{rg}(A) \underset{th24}{=} \mathrm{rg}({}^tA)$ = nb de colonnes non nulles de ${}^tA$

= nb de lignes non nulles de A

Exemple 3 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$

⚠ Pour l'algorithme de Gauss-Jordan les pivots doivent être non nuls : si ils dépendent d'un paramètre il faut procéder par disjonction de cas.

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \quad C_1 \leftrightarrow C_2$$

$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & -a & a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & -a & a \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a+a^2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + aL_2$$

Si $a + a^2 = a(a+1) \neq 0$ ie $a \notin \{-1, 0\}$: $\underline{\mathrm{rg}(A) = 3}$

Si $a = -1$: $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{2}$

Si $a = 0$: $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{2}$