dem M8 On suppose $f, g : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ linéaires, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et

que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ est une base de $\mathbb{E}$

et que $\mathcal{E} = (\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n})$ est une base de $\mathbb{F}$.

On pose $A = \mathrm{Mat}(f ; \mathcal{B}, \mathcal{C})$ et $B = \mathrm{Mat}(g ; \mathcal{B}, \mathcal{E})$.

On pose aussi $C = \mathrm{Mat}(\lambda f + \mu g ; \mathcal{B}, \mathcal{E})$

Par définition on a $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad f(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot \overrightarrow{\varepsilon_i}$$

$$g(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} \cdot \overrightarrow{\varepsilon_i}$$

$$(\lambda f + \mu g)(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j} \cdot \overrightarrow{\varepsilon_i}$$

Mais pour tout $j \in [\![1, p]\!]$ on a aussi :

$$\begin{aligned}
(\lambda f + \mu g)(\overrightarrow{e_j}) &= \lambda \cdot f(\overrightarrow{e_j}) + \mu \cdot g(\overrightarrow{e_j}) \\
&= \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot \overrightarrow{\varepsilon_i} + \mu \cdot \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} \cdot \overrightarrow{\varepsilon_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}) \cdot \overrightarrow{\varepsilon_i}
\end{aligned}$$

donc par unicité des coordonnées :

$\left(\forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \ c_{i,j} = \lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j} \right)$ ie $C = \lambda A + \mu B$

<u>dem th 10</u> On suppose $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ et $g : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{G}$ linéaires.

On se donne $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$ base de $\mathbb{E}$

$$\mathcal{E} = (\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_n}) \text{ base de } \mathbb{F}$$

$$\mathcal{D} = (\vec{u_1}, \dots, \vec{u_q}) \text{ base de } \mathbb{G}$$

On pose $A = \mathrm{Mat}(f ; \mathcal{B}, \mathcal{E})$, $B = \mathrm{Mat}(g ; \mathcal{E}, \mathcal{D})$

et $D = \mathrm{Mat}(g \circ f ; \mathcal{B}, \mathcal{D})$

Par déf on a $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$

et $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $f(\vec{e_j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \cdot \vec{\varepsilon_k}$

$$(g \circ f)(\vec{e_j}) = \sum_{i=1}^{q} d_{i,j} \cdot \vec{u_i}$$

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ g(\vec{\varepsilon_k}) = \sum_{i=1}^{q} b_{i,k} \cdot \vec{u_i}$$

Mais comme g est linéaire :

$\forall j \in [\![1, p]\!]$, $(g \circ f)(\vec{e_j}) = g(f(\vec{e_j})) = g\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \cdot \vec{\varepsilon_k}\right)$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \cdot g(\vec{\varepsilon_k})$$

Donc :

$$\forall j \in [\![1,p]\!], \quad (g \circ f)(\vec{e_j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \cdot \left(\sum_{i=1}^{q} b_{i,k} \cdot \vec{u_i} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{q} a_{k,j} \times b_{i,k} \cdot \vec{u_i} \right)$$

Fubini

$$= \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \times b_{i,k} \cdot \vec{u_i} \right)$$

$\times$ commute dans $\mathbb{K}$

$$= \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{i,k} \times a_{k,j} \cdot \vec{u_i} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{i,k} \times a_{k,j} \right) \cdot \vec{u_i}$$

Par unicité des coordonnées :

$$\forall (i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!], \quad d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} \times a_{k,j}$$

ie $\quad D = B \times A.$

Exemple Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A.

On note $\mathcal{B}_{cano}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$

et $\mathcal{E}_{cano}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

On a donc $A = \mathrm{Mat}(f ; \mathcal{B}_{cano}, \mathcal{E}_{cano})$

On a $f = f \circ id_{\mathbb{K}^p} = id_{\mathbb{K}^n} \circ f$

et $\mathrm{Mat}(id_{\mathbb{K}^p} ; \mathcal{B}_{cano}) = I_p$

$\mathrm{Mat}(id_{\mathbb{K}^n} ; \mathcal{E}_{cano}) = I_n$.

D'après le th 10 : $A = A \times I_p = I_n \times A$.