

Example 1

$$\mathbb{E} = \mathbb{R}_3[X]$$

$$B = (1, X, X^2, X^3)$$

$$B' = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$$

On a $(X-1)^2 = 1 - 2X + X^2$

$$(X-1)^3 = -1 + 3X - 3X^2 + X^3$$

donc $P_{B \rightarrow B'} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

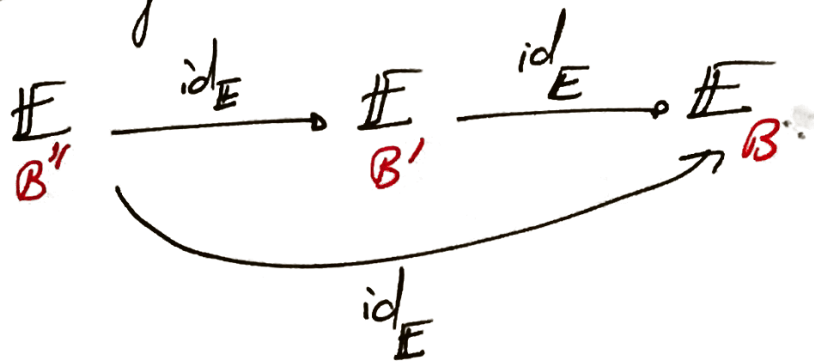
$\leftarrow 1$
 $\leftarrow X$
 $\leftarrow X^2$
 $\leftarrow X^3$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 1 $X-1$ $(X-1)^2$ $(X-1)^3$

dem prop 15: 1. On se donne $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ des bases de E .

On sait que $\text{id}_E \circ \text{id}_E = \text{id}_E$

On a le diagramme :



$$\text{Mat}(\text{id}_E \circ \text{id}_E; \mathcal{B}'', \mathcal{B}) = \text{Mat}(\text{id}_E; \mathcal{B}'', \mathcal{B}) = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}''}$$

$$\text{donc } \text{Mat}(\text{id}_E; \mathcal{B}', \mathcal{B}) \times \text{Mat}(\text{id}_E; \mathcal{B}'', \mathcal{B}') = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}''}$$

$$\text{donc } P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}''}$$

2. On se donne $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E .

$$\text{On a } P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}} = I_n$$

où $n = \dim(E)$

$$\text{Donc } P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \text{ est inversible et } (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$$

dem th 16

1. Soient B et B' deux bases de E .

Soit $\vec{x}^0 \in E$.

On pose $X = \text{Mat}(\vec{x}^0; B)$

$X' = \text{Mat}(\vec{x}^0; B')$

$P = P_{B \rightarrow B'} = \text{Mat}(\text{id}_E; B', B)$

On a $\text{id}_E(\vec{x}^0) = \vec{x}^0$

En considérant $\text{id}_E: \underset{B'}{E} \longrightarrow \underset{B}{E}$

on a $\text{Mat}(\text{id}_E(\vec{x}^0); B) = \text{Mat}(\vec{x}^0; B) = X$

donc $\text{Mat}(\text{id}_E; B', B) \times \text{Mat}(\vec{x}^0; B') = X$

ie $P \times X' = X$

et donc $X' = P^{-1} \times X$

2. Soient B et B' deux bases de E .

On se donne $\mathcal{F} = (\vec{u}_1^0, \dots, \vec{u}_p^0)$ une famille de vecteurs de E .

On pose $M = \text{Mat}(\pi_1^{\circ}, \dots, \pi_p^{\circ}; B)$

$M' = \text{Mat}(\pi_1^{\circ}, \dots, \pi_p^{\circ}; B')$

$$P = P_{B \rightarrow B'}$$

On note C_1, \dots, C_p les colonnes de M

et C'_1, \dots, C'_p les colonnes de M' .

D'après 1. on a :

$$\forall j \in [1, p], \quad P \times C'_j = C_j$$

Par propriété du produit matriciel : $P \times C'_j$ est

la j -ième colonne de la matrice $P \times M'$.

Donc les matrices $P \times M'$ et M ont les mêmes colonnes.

$$\text{Donc } P \times M' = M \text{ et } M' = P^{-1} \times M.$$

don cor 17

1. On suppose $f: E \rightarrow F$ linéaire

que B, B' sont deux bases de E

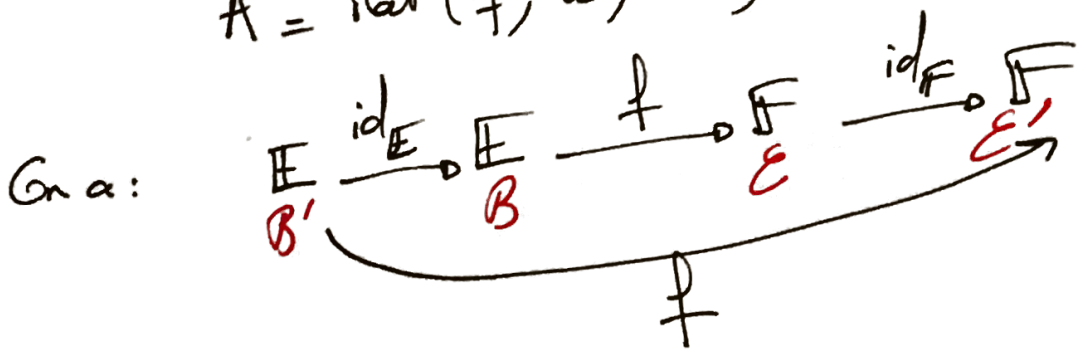
et que $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ sont deux bases de F .

On pose $P = P_{B \rightarrow B'} = \text{Mat}(\text{id}_E; B', B)$

$Q = P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} = \text{Mat}(\text{id}_F; \mathcal{E}', \mathcal{E})$

$A = \text{Mat}(f; B, \mathcal{E})$

$A' = \text{Mat}(f; B', \mathcal{E}')$



$$\text{On a } \text{id}_F \circ f \circ \text{id}_E = f$$

$$\text{donc } \text{Mat}(\text{id}_F \circ f \circ \text{id}_E; B', \mathcal{E}') = \text{Mat}(f; B', \mathcal{E}') = A'$$

$$\text{donc } \text{Mat}(\text{id}_F; \mathcal{E}, \mathcal{E}') \times \text{Mat}(f; B, \mathcal{E}) \times \text{Mat}(\text{id}_E; B', B) = A'$$

$$\text{donc } Q^{-1} \times A \times P = A'$$

$$\text{et } A = Q \times A' \times P^{-1}$$

2. Dans la formule précédente on choisit $E = B$
 $E' = B'$
donc $Q = P$.

Ainsi $A = P \times A' \times P^{-1}$ et $A' = P^{-1} \times A \times P$