# Exemple 1

$$E = \mathbb{R}_3[X]$$

$$\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$$

$$\mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$$

On a $(X-1)^2 = 1 - 2X + X^2$

$(X-1)^3 = -1 + 3X - 3X^2 + X^3$

donc

$$P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 1 & X-1 & (X-1)^2 & (X-1)^3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array} \end{array}$$

dem prop 15 : 1. On se donne $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ des bases de $\mathbb{E}$.

On sait que $id_E \circ id_E = id_E$

On a le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \underset{\mathcal{B}''}{\mathbb{E}} \arrow[r, "id_E"] \arrow[rr, bend right, "id_E"'] & \underset{\mathcal{B}'}{\mathbb{E}} \arrow[r, "id_E"] & \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{E}} \end{tikzcd}$$

$$Mat(id_E \circ id_E ; \mathcal{B}'', \mathcal{B}) = Mat(id_E ; \mathcal{B}'', \mathcal{B}) = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}''}$$

donc $Mat(id_E ; \mathcal{B}', \mathcal{B}) \times Mat(id_E ; \mathcal{B}'', \mathcal{B}') = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}''}$

donc $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}''}$

2. On se donne $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{E}$.

On a $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}} = I_n$

où $n = \dim(\mathbb{E})$

Donc $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ est inversible et $(P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}$

dem th 16

1. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{E}$

Soit $\vec{x} \in \mathbb{E}$

On pose $X = \mathrm{Mat}(\vec{x}; \mathcal{B})$

$X' = \mathrm{Mat}(\vec{x}; \mathcal{B}')$

$P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}(id_{\mathbb{E}}; \mathcal{B}', \mathcal{B})$

On a $id_{\mathbb{E}}(\vec{x}) = \vec{x}$

En considérant $id_{\mathbb{E}} : \underset{\mathcal{B}'}{\mathbb{E}} \longrightarrow \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{E}}$

on a $\mathrm{Mat}(id_{\mathbb{E}}(\vec{x}); \mathcal{B}) = \mathrm{Mat}(\vec{x}; \mathcal{B}) = X$

donc $\mathrm{Mat}(id_{\mathbb{E}}; \mathcal{B}', \mathcal{B}) \times \mathrm{Mat}(\vec{x}; \mathcal{B}') = X$

ie $P \times X' = X$

et donc $X' = P^{-1} \times X$

2. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{E}$.

On se donne $\mathcal{F} = (\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$.

On pose $M = \mathrm{Mat}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p} ; \mathcal{B})$

$M' = \mathrm{Mat}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p} ; \mathcal{B}')$

$P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$

On note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de $M$

et $C'_1, \dots, C'_p$ les colonnes de $M'$.

D'après 1. on a :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad P \times C'_j = C_j$$

Par propriété du produit matriciel : $P \times C'_j$ est la $j$-ième colonne de la matrice $P \times M'$.

Donc les matrices $PM'$ et $M$ ont les mêmes colonnes.

Donc $PM' = M$ et $M' = P^{-1} \times M$.

dem cor 17

1. On suppose $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ linéaire

que $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont deux bases de $\mathbb{E}$

et que $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ sont deux bases de $\mathbb{F}$.

On pose $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}(id_{\mathbb{E}} ; \mathcal{B}', \mathcal{B})$

$Q = P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} = \mathrm{Mat}(id_{\mathbb{F}} ; \mathcal{E}', \mathcal{E})$

$A = \mathrm{Mat}(f ; \mathcal{B}, \mathcal{E})$

$A' = \mathrm{Mat}(f ; \mathcal{B}', \mathcal{E}')$

On a :

$$\begin{tikzcd}
\underset{\mathcal{B}'}{\mathbb{E}} \arrow[r, "id_{\mathbb{E}}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{E}} \arrow[r, "f"] & \underset{\mathcal{E}}{\mathbb{F}} \arrow[r, "id_{\mathbb{F}}"] & \underset{\mathcal{E}'}{\mathbb{F}}
\end{tikzcd}$$

On a $id_{\mathbb{F}} \circ f \circ id_{\mathbb{E}} = f$

donc $\mathrm{Mat}(id_{\mathbb{F}} \circ f \circ id_{\mathbb{E}} ; \mathcal{B}', \mathcal{E}') = \mathrm{Mat}(f ; \mathcal{B}', \mathcal{E}')$

$= A'$

donc $\mathrm{Mat}(id_{\mathbb{F}} ; \mathcal{E}, \mathcal{E}') \times \mathrm{Mat}(f ; \mathcal{B}, \mathcal{E}) \times \mathrm{Mat}(id_{\mathbb{E}} ; \mathcal{B}', \mathcal{B}) = A'$

donc $Q^{-1} \times A \times P = A'$

et $A = Q \times A' \times P^{-1}$

2. Dans la formule précédente on choisit $\mathcal{E} = \mathcal{B}$
$\mathcal{E}' = \mathcal{B}'$

donc $Q = P$.

Ainsi $A = P \times A' \times P^{-1}$ et $A' = P^{-1} \times A \times P$