<u>dem th 12</u> On suppose $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ linéaire

et $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F})$.

On se donne $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ une base de $\mathbb{E}$

et $\mathcal{E} = (\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_n})$ une base de $\mathbb{F}$.

On pose $A = \mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{E}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $n = \dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F})$

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que f est un isomorphisme.

<u>but</u> : A inversible.

On sait que $f^{-1} : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{E}$ est linéaire.

On note $B = \mathrm{Mat}(f^{-1}; \mathcal{E}, \mathcal{B})$

On a $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{F}}$ et $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{E}}$

donc $AB = I_n$ et $BA = I_n$

Donc A est inversible et $A^{-1} = B$.

ie $\left(\mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{E})\right)^{-1} = \mathrm{Mat}(f^{-1}; \mathcal{E}, \mathcal{B})$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que A est inversible.

<u>but</u> f est un isomorphisme.

On sait déjà que f est linéaire

On note $g : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{E}$ l'unique application linéaire vérifiant $\mathrm{Mat}(g ; \mathcal{E}, \mathcal{B}) = A^{-1}$.

Comme $AA^{-1} = I_n$ et $A^{-1}A = I_n$

on a $\mathrm{Mat}(f \circ g ; \mathcal{E}) = \mathrm{Mat}(id_{\mathbb{F}}, \mathcal{E})$

et $\mathrm{Mat}(g \circ f ; \mathcal{B}) = \mathrm{Mat}(id_{\mathbb{E}}, \mathcal{B})$

Donc par unicité de la représentation matricielle :

$$f \circ g = id_{\mathbb{F}} \quad \text{et} \quad g \circ f = id_{\mathbb{E}}.$$

Donc f est bijective.

Ainsi f est un isomorphisme.

dem cor 13 On suppose que $n = \dim(\mathbb{E})$

et que $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n})$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$,

et que $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est une base de $\mathbb{E}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que la famille $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n})$ est une base de $\mathbb{E}$.

On pose $A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

but A est inversible

On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ l'endomorphisme de $\mathbb{E}$ représenté par A dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & \cdots & f(\vec{e_n}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{e_1} \\ \vdots \\ \vec{e_n} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{u_1} & \cdots & \vec{u_n} \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{e_1} \\ \vdots \\ \vec{e_n} \end{array}$$

On a $\begin{cases} f(\vec{e_1}) = \vec{u_1} \\ \vdots \\ f(\vec{e_n}) = \vec{u_n} \end{cases}$

La famille $(f(\vec{e_1}), \dots, f(\vec{e_n}))$ est donc une base de $\mathbb{E}$.

f est donc un automorphisme de $\mathbb{E}$.

D'après le th 12 : A est inversible.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que A est inversible.

<u>but</u> $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n})$ est une base de E.

On définit $f \in \mathcal{L}(E)$ comme précédemment.

Comme A est inversible, le th 12 nous donne que f est un automorphisme de E.

Donc la famille $(f(\vec{e_1}), \dots, f(\vec{e_n}))$ est une base de E

ie que la famille $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n})$ est une base de E.

Application : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

On note $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n})$ la famille de vecteurs représentés par A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, notée $\mathcal{B}_{cano}$:

$$A = \underset{\mathcal{B}_{cano}}{\mathrm{Mat}}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n})$$

Alors : A est inversible

$\iff (\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n})$ est une base de $\mathbb{K}^n$

$\iff (\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n})$ est libre

$\iff$ les colonnes de A forment une famille libre

Exemple 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible car

la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la deuxième et la troisième colonne sont égales.

Donc la famille des colonnes de A est liée.

Donc A n'est pas inversible.