<u>dem cor 20</u> On suppose que $u_n \geq 0$ apcr, $v_n \geq 0$ apcr

et $u_n \underset{n \to +\infty}{=} O(v_n)$

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n \geq 0$ et $v_n > 0$.

De plus $u_n \underset{n \to +\infty}{=} O(v_n)$ signifie que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est

bornée donc qu'il existe un réel M tel que :

$$\forall n \geq 0, \quad \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq M$$

Or $\forall n \geq n_0$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$ donc $\left|\frac{u_n}{v_n}\right| = \frac{u_n}{v_n}$

et donc $\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq M.v_n$

On sait que la série $\sum v_n$ converge, donc la série

$M. \sum v_n = \sum M v_n$ converge aussi et donc

par comparaison par inégalité de séries à termes positifs,

la série $\sum u_n$ converge.

Exemple 4 * $\forall n \geq 1$, $\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\dfrac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donc comme la seire $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge

on peut en déduire que la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge,

par comparaison de séries à termes positifs.

* $x^4 e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées,

donc $n^2 e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $e^{-\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Or la seire $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge,

donc par comparaison de séries à termes positifs, la

série $\sum e^{-\sqrt{n}}$ converge.