Exemple 1 Développement asymptotique à 2 termes des sommes partielles de la série harmonique.

On pose : $\forall n \geq 1,\ u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n.$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \forall t \in [n, n+1],\quad \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{donc } \int_n^{n+1} \frac{dt}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{n}$$

$$\text{ie } \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

Par somme d'inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}_{\stackrel{\text{def}}{=} H_n}$$

$$\text{ie } \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad H_n + \frac{1}{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq H_n$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n+1) - \frac{1}{n+1} + 1$$

En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = H_n - \ln(n) \geq \ln(n+1) - \ln(n) \geq 0$$

Donc la suite (u_n) est minorée par 0.

De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - (\ln(n+1) - \ln n)$$

$$= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leq 0$$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

D'après le th de la limite monotone, la suite (u_n) est convergente. On note γ sa limite (constante d'Euler).

Alors $\quad H_n = \ln(n) + \gamma + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$

<u>Rem</u>: $\gamma \simeq 0{,}5772156649\ldots$

Exemple 2 Restes d'une série convergente

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente donc son reste (R_n) est bien défini et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

et on sait que $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (prop 9).

On cherche un équivalent de R_n lorsque $n \to +\infty$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [n, n+1], \quad \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$

donc $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{n^2}$

donc $\displaystyle\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n^2}$

Par somme d'inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall N \geqslant n+1, \quad \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}$$

ie $$\sum_{k=n+1}^{N+1} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}$$

Par prolongement des inégalités lorsque $N \to +\infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_n - \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant R_n$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $$\frac{1}{n+1} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $$\frac{n}{n+1} \leqslant nR_n \leqslant \frac{n}{n+1} + \frac{n}{(n+1)^2}$$

Or $\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ et $\frac{n}{n+1} + \frac{n}{(n+1)^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

donc par encadrement : $nR_n = \dfrac{R_n}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

et donc $R_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

Exemple 3 Sommes partielles d'une série divergente

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge et comme elle est à termes positifs ses sommes partielles divergent vers $+\infty$.

Si on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Alors $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

On cherche un équivalent de S_n lorsque $n \to +\infty$.

La fonction $t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall t \in [n, n+1], \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\text{donc} \quad \int_n^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{n+1}} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{n}}$$

$$\text{ie} \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Par somme d'inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\text{ie} \quad S_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1 \leqslant 2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant S_n$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant S_n \leqslant 2\sqrt{n+1} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant 2\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

Or $2\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$ et $2\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$

donc par encadrement : $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$

donc $S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$

dem th 21 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cas $\alpha < 0$ alors $\alpha = -|\alpha|$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n^\alpha} = n^{|\alpha|}$

donc $\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

Cas $\alpha = 0$ Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n^\alpha} = 1$

donc $\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

Cas $\alpha > 0$ On note $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$\forall t > 0$, $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall t > 0$, $f'(t) = -\alpha t^{-\alpha - 1} = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$

< 0 car $\alpha > 0$

Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [n, n+1]$, $\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_n^{n+1} \frac{dt}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{n^\alpha}$

* Si $\alpha \neq 1$ & $\alpha > 0$

ie $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{-\alpha+1}\right]_{t=n}^{t=n+1} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$

ie $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(n^{-\alpha+1} - (n+1)^{-\alpha+1}\right) \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$

Par somme d'inégalités :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \sum_{k=1}^{n} \left(k^{-\alpha+1} - (k+1)^{-\alpha+1}\right) \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}}_{\overset{\text{def}}{=} S_n}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n + \frac{1}{(n+1)^\alpha} - 1 \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - (n+1)^{-\alpha+1}\right) \leqslant S_n$

ie donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\alpha-1}\left(1-(n+1)^{1-\alpha}\right) \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(1-(n+1)^{1-\alpha}\right) + 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$

** Si $\alpha > 1$: $\quad (n+1)^{1-\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $\frac{1}{(n+1)^\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\frac{1}{\alpha-1}\left(1-(n+1)^{1-\alpha}\right) + 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{}$ 1/(alpha-1) +1

Donc la suite (S_n) ne diverge pas vers $+\infty$.
Comme elle est croissante on en déduit qu'elle est convergente.

Donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

** Si $\alpha < 1$: $(n+1)^{1-\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

donc $\frac{1}{\alpha-1}\left(1-(n+1)^{1-\alpha}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

donc $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

** Si $\alpha = 1$: On a déjà vu que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

En conclusion :

la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$

Comparaison à une série de Riemann :

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

* on suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \longrightarrow 0$.

Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

Comme $\alpha > 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge et donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.

Si on a $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$ alors comme une suite convergente est bornée on a $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et les arguments sont les mêmes.

* On suppose qu'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n \longrightarrow +\infty$.

Alors $\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{u_n} = \frac{1}{n^\alpha u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$

Comme $\alpha \leq 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ diverge.

IMPORTANT

* Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ on ne peut rien en déduire sur la nature de la série $\sum u_n$ (penser à $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$).

* Par contre si $n^2 u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ alors la série $\sum u_n$ converge.

Exemple 4

* $u_n = \frac{\ln^3(n)}{n^2}$ si $n \geqslant 1$.

On a $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 0$.

$n^{3/2} u_n = \frac{\ln^3(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par croissance comparées.

Donc $u_n = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

Comme $\frac{3}{2} > 1$. la série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.

* $u_n = \frac{\ln^{12}(n)}{\sqrt{n}}$ si $n \geqslant 1$.

On a $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 0$.

$\sqrt{n} \cdot u_n = \ln^{12}(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc $\frac{1}{\sqrt{n}\, u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc $\frac{1}{\sqrt{n}} = \underset{n \to +\infty}{o}(u_n)$

Comme $\frac{1}{2} \leq 1$ la série de Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ diverge.