dem th 23 * Cas où (u_n) est une suite réelle

On suppose que la série $\sum_{n\geq n_0} |u_n|$ converge.

On a $\forall n \geq n_0$, $u_n = \underbrace{\frac{u_n + |u_n|}{2}}_{\stackrel{\text{def}}{=} a_n} - \underbrace{\frac{|u_n| - u_n}{2}}_{\stackrel{\text{def}}{=} b_n} = \max(0, u_n) + \min(0, u_n)$

Par propriété de la valeur absolue on a :

$$\forall n \geq n_0, \quad -|u_n| \leq u_n \leq |u_n|$$

On a donc $\forall n \geq n_0$, $0 \leq a_n \leq |u_n|$ et $0 \leq b_n \leq |u_n|$

Comme la série $\sum |u_n|$ converge on peut en déduire par comparaison de séries à termes positifs que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent.

Donc la série $\sum u_n$ converge comme combinaison linéaire de séries convergentes (th 12).

* Cas où (u_n) est une suite complexe

On suppose que la série $\sum |u_n|$ est convergente

On a $\forall n \geq n_0$, $|Re(u_n)| \leq |u_n|$ et $|Im(u_n)| \leq |u_n|$

donc par comparaison de séries à termes positifs les séries $\sum_{n\geq n_0} |Re(u_n)|$ et $\sum_{n\geq n_0} |Im(u_n)|$ convergent.

Donc les séries $\sum_{n \geq n_0} Re(u_n)$ et $\sum_{n \geq n_0} Im(u_n)$ convergent absolument et donc convergent d'après ce qui précède.

On pose $\forall n \geq n_0$, $S_n \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n} u_k$

$$A_n \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n} Re(u_k)$$

$$B_n \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n} Im(u_k)$$

Les suites (A_n) et (B_n) sont convergentes.

On a $\forall n \geq n_0$, $A_n = Re(S_n)$ et $B_n = Im(S_n)$

donc la suite (S_n) est convergente.

Donc la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.

Exemple 1 $\forall n \geq 1$, $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$

Comme $2 > 1$ la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

donc la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument et

donc elle converge.

Exemple 2 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $0<b<1$.

On fixe $x \in \mathbb{R}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $|b^n \times \cos(a^n \pi x)| = b^n \times |\cos(a^n \pi x)| \leq b^n$

Comme $0<b<1$ la série géométrique $\sum b^n$ converge.

Donc par comparaison de séries à termes positifs la série $\sum b^n \cos(a^n \pi x)$ converge absolument et donc elle converge.

Donc si on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$ alors

f est définie sur $\mathbb{R}$.

C'est la fonction de Weierstrass.

Elle est continue en tout point de $\mathbb{R}$ mais dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

dem prop 24 On suppose les séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ absolument convergentes.

Donc les séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$, $\sum_{n\geq n_0} |u_n|$, $\sum_{n\geq n_0} v_n$ et $\sum_{n\geq n_0} |v_n|$ sont convergentes.

1. Pour tout $N \geq n_0$ on a d'après l'inégalité triangulaire :

$$\left|\sum_{n=n_0}^{N} u_n\right| \leq \sum_{n=n_0}^{N} |u_n|$$

or $\sum_{n=n_0}^{N} |u_n| \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$ puisque la série $\sum_{n\geq n_0} |u_n|$ converge

et $\sum_{n=n_0}^{N} u_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ puisque la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge

et donc par continuité sur $\mathbb{R}$ de la valeur absolue :

$$\left|\sum_{n=n_0}^{N} u_n\right| \xrightarrow[N\to+\infty]{} \left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right|$$

Donc par prolongement des inégalités :

$$\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$$

2. Comme les séries $\sum_{n\geq n_0} |u_n|$ et $\sum_{n\geq n_0} |v_n|$ convergent

on sait que la série $\sum_{n\geq n_0} (|u_n|+|v_n|)$ converge (th 12).

Or $\forall n \geq n_0$, $0 \leq |u_n+v_n| \leq |u_n|+|v_n|$

Donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq n_0} |u_n+v_n|$ converge ie la série $\sum_{n\geq n_0} (u_n+v_n)$ converge absolument.

De plus la série $|\lambda| . \sum_{n\geq n_0} |u_n| = \sum_{n\geq n_0} |\lambda u_n|$ converge aussi (th 12) ie la série $\sum_{n\geq n_0} \lambda u_n$ converge absolument.

Exemple 3 * La série $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (c'est la série harmonique).

Donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ ne converge pas absolument.

* Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \times \frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \times \int_0^1 t^k \, dt$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} t^k \right) dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale}$$

$$= -\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k \right) dt$$

$$= -\int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t} \, dt \quad \text{car dans l'intégrale } t \neq -1$$

$$= -\int_0^1 \frac{dt}{1+t} + \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} \, dt$$

$$= -\ln 2 + \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} \, dt$$

On a : $\left| \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \right| \leqslant \int_0^1 \left| \frac{(-t)^n}{1+t} \right| dt = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$

et $\forall t \in [0,1], 0 \leqslant \frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$ car $1+t \geqslant 1$

donc $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leqslant \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$

On a donc : $\left| \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \right| \leqslant \frac{1}{n+1}$

Comme $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ le th de majoration de l'erreur

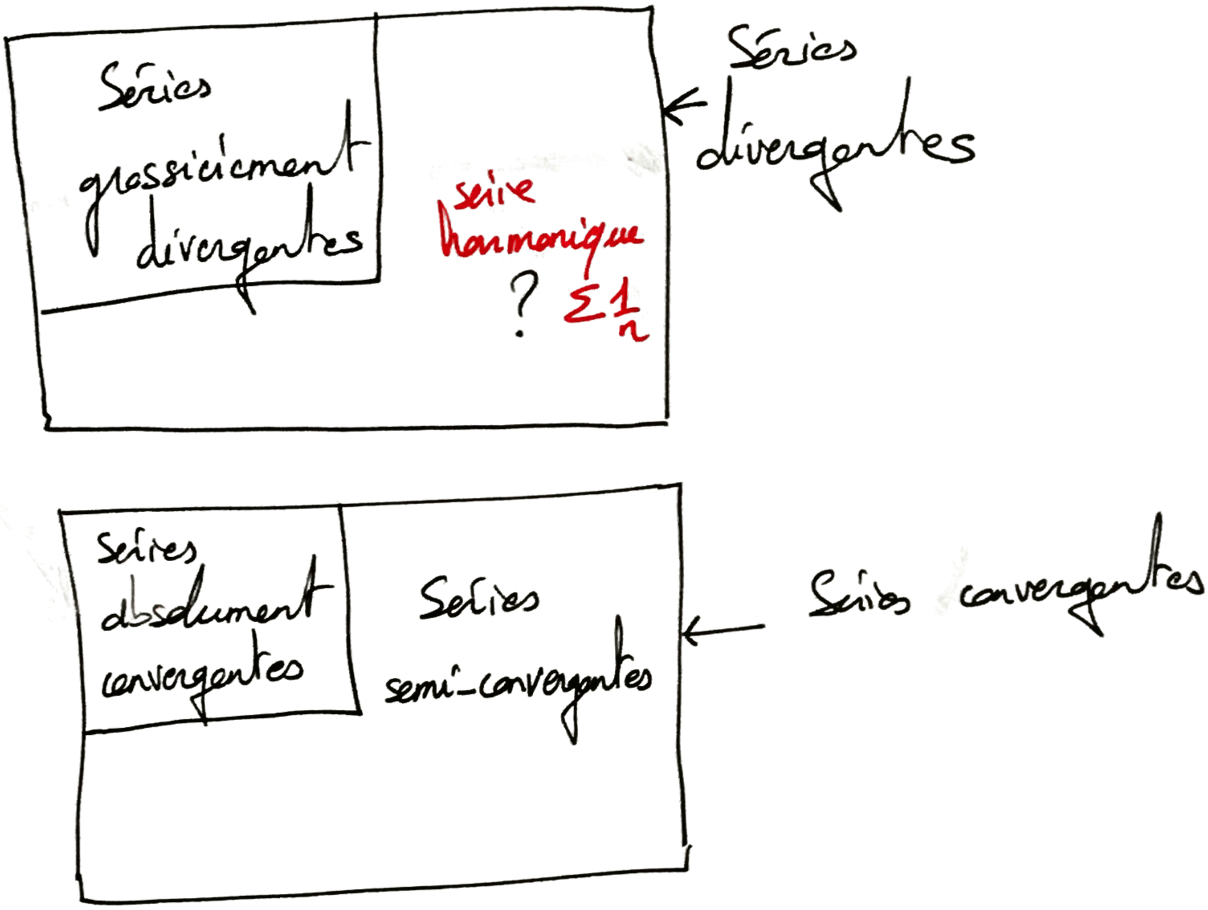
donne $\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\ln(2)$

Ainsi la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$$

BILAN


Séries grossièrement divergentes
série harmonique
? $\sum \frac{1}{n}$
Séries divergentes
Séries absolument convergentes
Séries semi-convergentes
Séries convergentes