<u>dem prop 26</u> On suppose que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant a_n \leqslant 9$ donc $0 \leqslant \frac{a_n}{10^n} \leqslant 9 \times \left(\frac{1}{10}\right)^n$

Comme $-1 < \frac{1}{10} < 1$ la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{10}\right)^n$ converge. Donc par comparaison de séries à termes positifs la série $\sum \frac{a_n}{10^n}$ converge.

<u>dem th 27</u> Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

Existence

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \lfloor 10^n x \rfloor$ puis $x_n = \frac{c_n}{10^n}$ puis $y_n = x_n + \frac{1}{10^n}$

On pose ensuite $\begin{cases} a_0 = c_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ a_n = c_n - 10c_{n-1} \end{cases}$

* On voit facilement que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{Z}$
* On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n \leqslant 10^n x < c_n + 1$

donc $x_n \leqslant x < y_n$

Il est clair que $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n - x_n = \frac{1}{10^n} = \left(\frac{1}{10}\right)^n$

comme $-1 < \frac{1}{10} < 1$ on a $\left(\frac{1}{10}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $y_n - x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $10c_n \leqslant 10^{n+1} x < 10c_n + 10$

Comme $10c_n \in \mathbb{Z}$ on en déduit que $10c_n \leqslant \lfloor 10^{n+1} x \rfloor$

ie $10c_n \leqslant c_{n+1}$

Comme $10c_n + 10 \in \mathbb{Z}$ on a $10c_n + 10 \geqslant \lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1$

ie $10c_n + 10 \geqslant c_{n+1} + 1$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $10c_n \leqslant c_{n+1} < c_{n+1} + 1 \leqslant 10c_n + 10$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant x_{n+1} < y_{n+1} \leqslant y_n$

Donc (x_n) est croissante et (y_n) est décroissante.

Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

Elles convergent donc vers une même limite $l \in \mathbb{R}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant x < y_n$.

Par prolongement des inégalités lorsque $n \to +\infty$:

$$l \leqslant x \leqslant l \text{ donc } l = x.$$

Donc (x_n) et (y_n) convergent vers x.

* On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $10c_{n-1} \leqslant c_n < 10c_{n-1} + 10$

donc $0 \leqslant a_n = c_n - 10c_{n-1} < 10$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in [\![0, 9]\!]$

* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{c_n}{10^n} = c_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{c_k}{10^k} - \frac{c_{k-1}}{10^{k-1}} \right)$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k - 10c_{k-1}}{10^k} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$

Donc $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$.

* Il reste à montrer que la suite (a_n) n'est pas stationnaire sur 9 apcr.

Supposons par l'absurde qu'il existe un entier naturel m tel que $\forall n \geq m$, $a_n = 9$.

On a :

$$\forall n \geq m, \quad x_n - x_m = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10^{m+1}} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n-m}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{1}{10^m} \times \left(1 - \frac{1}{10^{n-m}}\right) = \frac{1}{10^m} - \frac{1}{10^n}$$

On passe à la limite quand $n \to +\infty$:

$$x - x_m = \frac{1}{10^m} - 0$$

$$\text{donc} \quad x = x_m + \frac{1}{10^m} = y_m$$

C'est absurde car on a vu que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x < y_n$.

Unicité Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'entiers naturels telle que

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n \in [\![0, 9]\!]$
- (b_n) non stationnaire sur 9 apcr
- $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n}$

Par l'absurde on suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ie $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ a_{n_0} \neq b_{n_0}$.

Or pose $m = \min\{n \in \mathbb{N},\ a_n \neq b_n\} = \min\{\underbrace{n \in [\![0, n_0]\!],\ a_n \neq b_n}_{\text{ensemble fini}}\}$

On a donc $a_0 = b_0$ et ... et $a_{m-1} = b_{m-1}$ mais $a_m \neq b_m$

On a $a_m < b_m$ ou $a_m > b_m$.

Supposons par exemple $a_m > b_m$ (l'autre cas est similaire).

$$\forall n > m,\quad \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{10^k} = \frac{a_m - b_m}{10^m} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{a_k - b_k}{10^k}$$

Lorsque $n \to +\infty$: $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{10^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x - x = 0$

$\frac{a_m - b_m}{10^m}$ est une constante p/r à n

Donc $\sum_{k=m+1}^{n} \frac{a_k - b_k}{10^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{a_m - b_m}{10^m}$

En multipliant par -1 :

$$\sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k - a_k}{10^k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{a_m - b_m}{10^m}$$

D'autre part :

$\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_k \leq 9$ et $0 \leq b_k \leq 9$

donc $b_k - a_k \leq 9$

Par somme d'inégalités :

$$\forall n > m, \quad \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k - a_k}{10^k} \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10^{m+1}} \times \frac{1 - \frac{1}{10^{n-m}}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{1}{10^m} - \frac{1}{10^n}$$

$$< \frac{1}{10^m}$$

Par prolongement des inégalités lorsque $n \to +\infty$:

$$\frac{a_m - b_m}{10^m} \leqslant \frac{1}{10^m}$$

Mais a_m et b_m sont des entiers naturels tels que

$a_m > b_m$ donc $a_m - b_m \geqslant 1$

donc $\dfrac{a_m - b_m}{10^m} \geq \dfrac{1}{10^m}$

Ainsi $\dfrac{a_m - b_m}{10^m} = \dfrac{1}{10^m}$ et donc $a_m = b_m + 1$

et donc $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{b_k - a_k}{10^k} = \frac{1}{10^m} = \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k}$

(somme d'une série géométrique)

Donc $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{9-(b_k - a_k)}{10^k} = 0$

Comme c'est la somme d'une série à termes positifs c'est la limite d'une suite croissante et positive.
Comme elle est nulle, c'est que c'est suite est stationnaire égale à 0.

Donc $\forall n > m$, $9 = b_n - a_n$

donc $\forall n > m$, $b_n = 9$ et $a_n = 0$

Donc (b_n) est stationnaire sur 9 à partir du rang m.

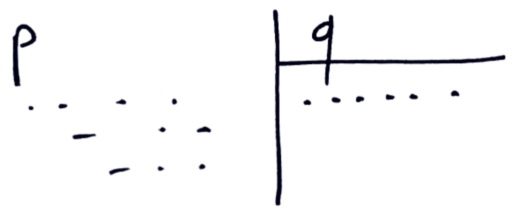
c'est absurde.

dem Th 29 Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$\boxed{(i) \Longrightarrow (ii)}$ On suppose que $x \in \mathbb{Q}$ ie x est un nombre rationnel.

Alors $x = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

On réalise la division posée de p par q qu'on continu au delà de la virgule



A chaque étape le reste est pris dans $[\![0, q-1]\!]$ donc au bout de q étapes maximum on tombe sur un reste déjà utilisé avant.

A partir de là on tombe sur une succession périodique d'étapes.

Donc le développement décimal propre de x est périodique apcr.

$\boxed{(ii) \Longrightarrow (i)}$ Soit $x \in \mathbb{R}^+$ dont le développement décimal propre est périodique apcr :

$$x = a_0, a_1 a_2 \ldots a_m \alpha_1 \ldots \alpha_p \alpha_1 \ldots \alpha_p \ldots$$

$a_0 = \lfloor x \rfloor$ et : x est rationnel $\Longleftrightarrow x - \lfloor x \rfloor$ est rationnel

donc on peut supposer :

$$x = 0, a_1 a_2 \ldots a_m \alpha_1 \ldots \alpha_p \alpha_1 \ldots \alpha_p \ldots$$

$a_1 a_2 \ldots a_m = \lfloor 10^m x \rfloor$

et : x est rationnel $\Longleftrightarrow x - \lfloor 10^m x \rfloor$ est rationnel

donc on peut supposer :

$$x = 0, \alpha_1 \ldots \alpha_p \alpha_1 \ldots \alpha_p \ldots$$

Alors $10^p x = \alpha_1 \ldots \alpha_p, \alpha_1 \ldots \alpha_p \alpha_1 \ldots \alpha_p \ldots$

$$= \underbrace{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\overset{\text{def}}{=} N \in \mathbb{N}} + x$$

Donc $x = \dfrac{N}{10^p - 1}$ donc $x \in \mathbb{Q}$.

Exemple 1

On pose $x = 3,14151515\ldots$

Alors $x = \frac{1}{100}(314 + y)$

où $y = 0,151515\ldots$

On a $100y = 15,151515\ldots = 15 + y$

donc $y = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$

Donc $x = \frac{1}{100}\left(314 + \frac{5}{33}\right) = \frac{10\,367}{3\,300}$.

Exemple 2 Argument de la diagonale de Cantor

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

Alors $\mathbb{R} \supseteq f(\mathbb{N}) = \{ f(n) \,;\, n \in \mathbb{N} \}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ si la } n\text{-ième décimale de } f(n) \text{ est } 0 \\ 0 \text{ si la } n\text{-ième décimale de } f(n) \text{ est non nulle} \end{cases}$$

Alors si on pose $x = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$

on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \neq f(n)$ (ces deux réels n'ont pas la même n-ième décimale)

Donc $x \in \mathbb{R}$ et $x \notin f(\mathbb{N})$. Donc $f(\mathbb{N}) \subsetneq \mathbb{R}$.

Donc f n'est pas surjective.

Donc il n'existe pas de bijection $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

donc $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.