<u>dem prop 2</u> Soit n entier naturel tel que $n \geqslant n_0 + 1$.

On a $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=n_0}^{n-1} u_k + u_n = S_{n-1} + u_n$

donc $S_n - S_{n-1} = u_n$.

Exemple 1 Pour $n \geqslant 2$ on pose $u_n \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{n(n-1)}$

Alors $\forall n \geqslant 2$, $S_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k(k-1)}$

$$= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n}$$

$$= 1 - \frac{1}{n}$$

Donc $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

La série $\sum \dfrac{1}{n(n-1)}$ est donc convergente et sa limite est 1.

<u>Exemple 2</u> Pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n \overset{\text{def}}{=} 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$

Donc $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Ainsi la série $\sum 1$ est divergente.

Example 3 Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Par l'absurde supposons que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$.

Alors : $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ et $S_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

donc $S_{2n} - S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l - l = 0$

Mais $\forall n \geq 1$, $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}$$

or comme $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ est continue sur $[0,1]$ on a d'après le théorème de la valeur moyenne :

$$S_{2n} - S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} - 0 + 0 = \ln 2$$

Par unicité de la limite : $\ln 2 = 0$ ie $2 = 1$. Absurde.

Donc la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ diverge.

Donc la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

<u>dem prop 6</u> On pose :

$$\forall n \geq n_0, \quad S_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

$$\forall n \geq n_1, \quad T_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=n_1}^{n} u_k .$$

Alors $\forall n \geq n_1$: $$S_n = \underbrace{\sum_{k=n_0}^{n_1 - 1} u_k}_{\overset{\text{def}}{=} C \text{ constante p/r à } n} + \underbrace{\sum_{k=n_1}^{n} u_k}_{= T_n}$$

On a $\forall n \geq n_1, \quad S_n = C + T_n$.

Si $(S_n)_{n \geq n_0}$ converge vers un réel l alors $(T_n)_{n \geq n_1}$ converge vers $l - C$.

Réciproquement : si $(T_n)_{n \geq n_1}$ converge vers un réel L alors $(S_n)_{n \geq n_0}$ converge vers $L + C$.

Donc : la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ converge $\Leftrightarrow$ la suite $(T_n)_{n \geq n_1}$ converge

Donc : les séries $\sum_{n \geq n_1} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} u_n$ sont de même nature.

<u>dem prop 9</u> Soit $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ une série convergente.

Pour $n\geqslant n_0$ on pose : $S_n \overset{def}{=} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

On a supposé la série convergente donc la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$

converge vers un réel $S \overset{def}{=} \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$

On pose ensuite :

$\forall n\geqslant n_0,\quad R_n \overset{def}{=} S - S_n$

On fixe $n\geqslant n_0$.

On a $\forall N\geqslant n,\quad S_N - S_n = \sum_{k=n_0}^{N} u_k - \sum_{k=n_0}^{n} u_k$

$$= \sum_{k=n+1}^{N} u_k$$

Or $\sum_{N\geqslant n_0} u_N$ converge donc $\sum_{N\geqslant n+1} u_N$ converge aussi

d'après la prop 6. Si on fait tendre $N \longrightarrow +\infty$ dans

l'égalité précédente : $S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

ie $\quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

De plus $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} S$

donc $S - S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} S - S = 0$

ie $R_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$