Exemple 1 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n\geqslant 2}\left(\underbrace{-\frac{1}{n}}_{v_{n+1}} - \left(\underbrace{-\frac{1}{n-1}}_{v_n}\right)\right)$

Donc : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge puisque (v_n) converge.

De plus $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 0 - \left(-\frac{1}{1}\right)$

$= 1$

Exemple 2 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n\geqslant 1}\left(\ln(n+1) - \ln n\right)$

or $\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

donc la suite $(\ln(n))_{n\geqslant 1}$ diverge.

Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge.

dem th10 : Soit $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose la suite $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ converge.

On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. On a $\ell \in \mathbb{K}$.

On pose aussi $\forall n \geqslant n_0$, $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} (v_{k+1} - v_k)$

$= v_{n+1} - v_{n_0}$

Alors $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - v_{n_0}$

donc la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ converge.

Donc la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge.

On pose $S = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$. Alors $S \in \mathbb{K}$.

On pose aussi $\forall n \geqslant n_0$, $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_{n_0}$

On a $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$

donc $v_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S + v_{n_0}$

donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S + v_{n_0}$ Donc la suite $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ converge.

L'équivalence est démontrée et on a $S = \ell - v_{n_0}$ ie :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_{n_0}$$

<u>dem Th 11</u> : On suppose que la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge.

Pour $n \geqslant n_0$ on pose : $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$

On a $\forall n \geqslant n_0 + 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$ d'après la prop 2

Si on note $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ on a $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} S$

donc $S_{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} S$

Donc par somme de limites :

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} S - S = 0$$

dem th12 : On suppose que les séries $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} v_n$ convergent et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On pose $\forall n \geqslant n_0$,
$$S_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$
$$T_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=n_0}^{n} v_k$$
$$U_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=n_0}^{n} (u_k + v_k)$$
$$V_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=n_0}^{n} \lambda u_k$$

On note $S \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ et $T \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.

On a $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$ et $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} T$

On a $\forall n \geqslant n_0$, $U_n = S_n + T_n$ par linéarité de $\sum$

donc par somme de limites : $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S+T$

Donc la série $\sum (u_n + v_n)$ converge et :
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = S + T = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$$

De même $\forall n \geqslant n_0$, $V_n = \lambda \times S_n$

donc $V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda . S$

Donc la série $\sum \lambda u_n$ converge et :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \lambda . u_n = \lambda \times \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$

dem cor 13 :

1. * On suppose que les séries $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ convergent.

D'après le th 12, la série $\sum_{n \geqslant n_0} (u_n + v_n)$ converge et :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$$

* On suppose que les séries $\sum_{n \geqslant n_0} (u_n + v_n)$ et $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ convergent.

On a $\forall n \geqslant n_0$, $v_n = (u_n + v_n) + (-u_n)$

D'après le th 12, la série $\sum_{n \geqslant n_0} (-u_n)$ converge et :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-u_n) = -\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$

et donc toujours d'après le th 12, la série

$\sum_{n \geqslant n_0} v_n = \sum_{n \geqslant n_0} \Big((u_n + v_n) + (-u_n) \Big)$ converge et :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \Big((u_n + v_n) + (-u_n) \Big)$$

$$\overset{\text{th 12}}{=} \sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) + \sum_{n=n_0}^{+\infty} (-u_n)$$

$$\overset{\text{th 12}}{=} \sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) - \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$

Donc la série $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ converge et :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$$

* On suppose que les séries $\sum_{n\geq n_0}(u_n+v_n)$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ convergent.

On montre de même que la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge et :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=n_0}^{+\infty}u_n+\sum_{n=n_0}^{+\infty}v_n$$

2. * On suppose que la série $\sum u_n$ converge et que la série $\sum v_n$ diverge.

Par l'absurde si la série $\sum(u_n+v_n)$ converge, comme la série $\sum u_n$ converge on a aussi que la série $\sum v_n$ converge. C'est absurde.

Donc la série $\sum(u_n+v_n)$ diverge.

* De même si la série $\sum u_n$ diverge et la série $\sum v_n$ converge.

3. * Si $\forall n\geq 1$, $u_n=$ 1/n et $v_n=-\frac{1}{n}$

alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent mais la série $\sum(u_n+v_n)$ converge (les sommes partielles sont constantes égales à 0 donc convergent vers 0)

* Si $\forall n\geq 1$, $u_n=v_n=\frac{1}{n}$

alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent et d'après le th12 la série $\sum(u_n+v_n)=\sum 2\times\frac{1}{n}$ diverge aussi.

dem cor 14 : Soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

D'après le th 12 la série $\sum \alpha u_n$ converge

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que la série $\sum \alpha u_n$ converge.

D'après le th 12 la série $\sum \frac{1}{\alpha} \alpha u_n = \sum u_n$ converge

Par double-implication :

$$\sum u_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum \alpha u_n \text{ converge}.$$

Donc les séries $\sum u_n$ et $\sum \alpha u_n$ sont de même nature.