<u>Exemple 1</u> Dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique on a pour $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

dans $\mathbb{R}^3$ si $\vec{u} = (x, y, z)$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

<u>Exemple 2</u> Dans $C^0([a,b], \mathbb{R})$ muni de sa structure préhilbertienne canonique on a pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue :

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 \, dt}$$

dans $C^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$:

$$\|\cos\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} \cos(t)^2 \, dt} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2} \, dt}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{2\pi}} = \sqrt{\pi}$$

<u>Exemple 1</u> Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{E}^2$.

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v} \rangle$$
$$= \langle \vec{u}, \vec{u}+\vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u}+\vec{v} \rangle$$
$$= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$$
$$= \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \langle \vec{u}-\vec{v}, \vec{u}-\vec{v} \rangle$$
$$= \langle \vec{u}, \vec{u}-\vec{v} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{u}-\vec{v} \rangle$$
$$= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$$
$$= \|\vec{u}\|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$$

<u>dem th 13</u> Soit $\vec{u} \in E$

<u>Séparation</u> : $\|\vec{u}\| = 0 \iff \|\vec{u}\|^2 = 0$

$\iff \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$

$\iff \vec{u} = \vec{0}$

car un produit scalaire est une forme définie

<u>Homogénéité</u> Si $\lambda \in \mathbb{R}$:

$\|\lambda.\vec{u}\|^2 = \langle \lambda.\vec{u}, \lambda\vec{u} \rangle = \lambda^2.\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \lambda^2.\|\vec{u}\|^2$

donc $\left| \|\lambda.\vec{u}\| \right| = \left| \lambda.\|\vec{u}\| \right|$

Comme la norme est positive : $\|\lambda.\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$

dem th14 Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$.

* Cas 1 $\vec{u} = \vec{0_E}$.

Alors $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{0_E}, \vec{v} \rangle = 0$

et $\|\vec{u}\| = \|\vec{0_E}\| = \sqrt{\langle \vec{0_E}, \vec{0_E} \rangle} = \sqrt{0} = 0$

donc $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = 0$

Ainsi $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ lorsque $\vec{u} = \vec{0_E}$

* Cas 2 $\vec{u} \neq \vec{0_E}$

On pose $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) = \|t.\vec{u} + \vec{v}\|^2 \geqslant 0$

$= \langle t\vec{u} + \vec{v}, t\vec{u} + \vec{v} \rangle$

$= t^2.\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + t.\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + t\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$

$= t^2 \|\vec{u}\|^2 + 2t\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$

Donc P est une fonction polynômiale. Comme $\vec{u} \neq \vec{0_E}$ on a $\|\vec{u}\| \neq 0$ donc $\deg(P) = 2$. Comme $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) \geqslant 0$ alors le discriminant de P est négatif.

$$\Delta = 4.\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 - 4\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2 \leqslant 0$$

ie $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \leqslant \|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2$

donc $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

Et on a : $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

$\iff \Delta = 0$

$\iff \exists! \, t_0 \in \mathbb{R} ; \; P(t_0) = 0$

$\iff \exists! \, t_0 \in \mathbb{R} ; \; \|t_0 . \vec{u} + \vec{v}\| = 0$

$\iff \exists! \, t_0 \in \mathbb{R} ; \; t_0 . \vec{u} + \vec{v} = \vec{0_E}$

$\iff \exists! \, t_0 \in \mathbb{R} ; \; \vec{v} = -t_0 . \vec{u}$

$\iff \vec{v}$ proportionnelle à $\vec{u}$

$\iff \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\quad$ (car $\vec{u} \neq \vec{0_E}$)

* Dans tous les cas :

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

et il y a égalité ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exemple 2 Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels

On pose $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\vec{v} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

donc $$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \times y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

donc $$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \times y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right)$$

Il y a égalité ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

ssi les listes $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont proportionnelles.

Exemple 3 Soient f et g fonctions continues sur $[a,b]$.

On munit $C^0([a,b];\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|\langle f,g\rangle| \leq \|f\| \times \|g\|$$

donc $$\left|\int_a^b f(t)\times g(t)\,dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,dt} \times \sqrt{\int_a^b g(t)^2\,dt}$$

donc $$\left(\int_a^b f(t)\times g(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2\,dt\right)\times\left(\int_a^b g(t)^2\,dt\right)$$

Il y a égalité ssi f et g sont colinéaires / proportionnelles.

Rappel $$\int_a^b f(t)\times g(t)\,dt \neq \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\times\left(\int_a^b g(t)\,dt\right)$$

__dem cor 15__ : Soit $(\vec{u},\vec{v}) \in E^2$. On a :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\|$$ -->

$$\iff \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \leqslant \left(\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|\right)^2$$

$$\iff \|\vec{u}\|^2 + 2.\langle \vec{u},\vec{v}\rangle + \|\vec{v}\|^2 \leqslant \|\vec{u}\|^2 + 2.\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$$

$$\iff 2\langle \vec{u},\vec{v}\rangle \leqslant 2\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$$

$$\iff \langle \vec{u},\vec{v}\rangle \leqslant \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$$

Cette dernière inégalité est vraie d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Comme on a raisonné par équivalences :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Cas d'égalité pour l'inégalité triangulaire

On a vu que : $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

$$\Longleftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

- Supposons que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

Alors $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ car $\|.\| \geqslant 0$

D'après le cas d'égalité dans le th 15, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : $\exists \alpha \in \mathbb{R}.\ \vec{u} = \alpha \vec{v}$ ou $\vec{v} = \alpha \vec{u}$

Ou encore : $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\left(\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \vec{v} = \alpha \vec{u} \text{ et } \vec{u} \neq \vec{0} \right)$

Mais si $\begin{cases} \vec{v} = \alpha \vec{u} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \end{cases}$ on a $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha \|\vec{u}\|^2$

$$= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = |\alpha| . \|\vec{u}\|^2$$

Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$ on a $\|\vec{u}\| \neq 0$ donc $\alpha = |\alpha|$

et donc $\alpha \geqslant 0$.

Finalement : $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\left(\vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \exists \alpha \geqslant 0,\ \vec{v} = \alpha \vec{u} \right)$

- Réciproquement, si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et si $\exists \alpha \geqslant 0$ tq $\vec{v} = \alpha \vec{u}$:

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha \|\vec{u}\|^2$ et $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = \alpha \times \|\vec{u}\|^2$ car $\alpha \geqslant 0$

donc $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

et donc $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

__dem cor 16__

__1.__ On a $u = (u+v) + (-v)$

Donc d'après l'inégalité triangulaire :

$\|u\| \leqslant \|u+v\| + \|-v\|$

Mais $\|-v\| = \|v\|$ par homogénéité de la norme :

$\|u\| \leqslant \|u+v\| + \|v\|$

Et donc : $\|u\| - \|v\| \leqslant \|u+v\|$

De même : $\|v\| - \|u\| \leqslant \|u+v\|$

Donc $\big|\, \|u\| - \|v\| \,\big| \leqslant \|u+v\|$

__2.__ On applique l'inégalité du 1. avec les vecteurs u et $-v$:

$\big|\, \|u\| - \|-v\| \,\big| \leqslant \|u+(-v)\|$

ie $\big|\, \|u\| - \|v\| \,\big| \leqslant \|u-v\|$

Et d'après l'inégalité triangulaire :

$\|u+(-v)\| \leqslant \|u\| + \|-v\|$

donc $\|u-v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$

⚠ L'inégalité $\|u-v\| \leqslant \|u\| - \|v\|$ est __FAUSSE__

<u>Exemple 4</u> On suppose $\vec{u} \neq \vec{O}_E$.

Alors par homogénéité de la norme :

$$\left\| \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u} \right\| = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \|\vec{u}\| = 1$$