dem th 10

Pour $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
et $\vec{v} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

On pose $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$
donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in (\mathbb{R}^n)^3$

On note $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n)$
$\vec{v} = (y_1, \dots, y_n)$
$\vec{w} = (z_1, \dots, z_n)$

* $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \sum_{k=1}^{n} y_k \times x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \times y_k = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

* $\lambda \vec{u} + \vec{v} = (\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_n + y_n)$

$\langle \lambda \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k + y_k) \times z_k$

$= \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k z_k + \sum_{k=1}^{n} y_k z_k$

$= \lambda \times \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche.

Comme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique elle est <u>bilinéaire</u>.

* $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq 0$ car c'est une somme de réels positifs

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est <u>positive</u>.

* $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0$

$\iff \forall k \in [\![1, n]\!], x_k^2 = 0$ car c'est une somme de nombres positifs

$\iff \forall k \in [\![1, n]\!], x_k = 0$

$\iff \vec{u} = \vec{0}$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une <u>forme définie</u>.

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive donc un <u>produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$</u>.

<u>dem th 11</u> Pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues

on pose $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \times g(t)\, dt$

* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie sur $C^0([a,b]; \mathbb{R}) \times C^0([a,b]; \mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une <u>forme</u>.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f, g, h) \in C^0([a,b]; \mathbb{R})^3$.

* $\langle g, f \rangle = \int_a^b g(t) \times f(t)\, dt = \int_a^b f(t) \times g(t)\, dt = \langle f, g \rangle$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est <u>symétrique</u>.

* $$\begin{aligned} \langle \lambda f + g, h \rangle &= \int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) \times h(t)\, dt \\ &= \lambda \times \int_a^b f(t) \times h(t)\, dt + \int_a^b g(t) \times h(t)\, dt \\ &= \lambda \times \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle \end{aligned}$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est <u>linéaire à gauche</u>.

Comme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique elle est <u>bilinéaire</u>.

* $\langle f, f \rangle = \int_a^b f(t)^2\, dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale puisque $\forall t \in [a,b],\ f(t)^2 \geq 0$

$* \ \langle f, f \rangle = 0 \iff \int_a^b f(t)^2 dt = 0$

$\iff \forall t \in [a,b], \ f(t)^2 = 0$

par stricte positivité de l'intégrale d'une fonction continue et car $\forall t \in [a,b], \ f(t)^2 \geqslant 0$

$\iff \forall t \in [a,b], \ f(t) = 0$

$\iff$ f est la fonction nulle sur $[a,b]$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme définie.

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive donc un produit scalaire sur $C^0([a,b], \mathbb{R})$.