$\boxed{\text{dem Th 34}}$ $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$ par hypothèse.

Comme il est de dimension finie on peut se donner $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$ une base orthonormée de $\mathbb{F}$ (Th 30).

$\mathbb{F}^{\perp}$ est un sev de $\mathbb{E}$ (qui peut être de dim infinie).

Montrons par analyse-synthèse que $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}^{\perp}$

Soit u un vecteur de $\mathbb{E}$ fixé qcq.

ANALYSE On suppose que $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ avec $\vec{a} \in \mathbb{F}$
$\vec{b} \in \mathbb{F}^{\perp}$

Comme $\vec{a} \in \mathbb{F}$ et $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$ est une bon de $\mathbb{F}$ on a

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^{p} \langle \vec{a}, \vec{e_k} \rangle . \vec{e_k} \quad (\text{Th } 32)$$

Soit $k \in [\![1, p]\!]$. On a $\langle \vec{x}, \vec{e_k} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{e_k} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{e_k} \rangle$

Comme $\vec{b} \in \mathbb{F}^{\perp}$ et $\vec{e_k} \in \mathbb{F}$ on a $\langle \vec{b}, \vec{e_k} \rangle = 0$

Donc $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\langle \vec{a}, \vec{e_k} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{e_k} \rangle$

On a donc $\begin{cases} \vec{a} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \langle \vec{x}, \vec{e_k} \rangle \vec{e_k} \\ \vec{b} = \vec{x} - \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \langle \vec{x}, \vec{e_k} \rangle \vec{e_k} \end{cases}$

Donc $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont uniques.

SYNTHESE On définit les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ avec les formules ci-dessus.

On a $\vec{a} \in \mathrm{Vect}(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$ donc $\underline{\vec{a} \in \mathbb{F}}$

Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\langle \vec{b}, \vec{e_k} \rangle = \left\langle \vec{x} - \sum_{i=1}^{p} \langle \vec{x}, \vec{e_i} \rangle \vec{e_i}, \vec{e_k} \right\rangle$

$$= \langle \vec{x}, \vec{e_k} \rangle - \sum_{i=1}^{p} \langle \vec{x}, \vec{e_i} \rangle \underbrace{\langle \vec{e_i}, \vec{e_k} \rangle}_{\substack{=0 \text{ si } i \neq k \\ \text{et } =1 \text{ si } i=k}}$$

$$= \langle \vec{x}, \vec{e_k} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{e_k} \rangle$$

$$= 0$$

Comme $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k})$ on a donc $\underline{\vec{b} \in \mathbb{F}^{\perp}}$ (th 21)

De plus on a $\underline{\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}}$

Donc la décomposition de $\vec{x}$ existe.

<u>CONCLUSION</u> $\boxed{\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}^{\perp}}$

Retenons pour la suite que si $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$ bon de $\mathbb{F}$

alors pour $\vec{x} \in \mathbb{E}$: $\vec{x} = \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \langle \vec{x}, \vec{e_k} \rangle \vec{e_k}}_{\in \mathbb{F}} + \underbrace{\left(\vec{x} - \sum_{k=1}^{p} \langle \vec{x}, \vec{e_k} \rangle \vec{e_k} \right)}_{\in \mathbb{F}^{\perp}}$

On en déduit que $p_{\mathbb{F}}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{p} \langle \vec{x}, \vec{e_k} \rangle \vec{e_k}$. C'est le théorème 38 dem cor 36 :

1. Comme $\mathbb{E}$ est un espace euclidien, $\mathbb{F}$ est de dimension finie donc d'après le th 35 :

$$\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}^{\perp} \text{ et } \mathbb{F}^{\perp} \text{ est aussi de dimension finie.}$$

Donc $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{F}^{\perp})$ [chap 15]

donc $\dim(\mathbb{F}^{\perp}) = \dim(\mathbb{E}) - \dim(\mathbb{F})$

2. D'après le th 21 on a $\mathbb{F} \subseteq (\mathbb{F}^{\perp})^{\perp}$.

Mais $\dim((\mathbb{F}^{\perp})^{\perp}) \underset{=}{\overset{1.}{=}} \dim(\mathbb{E}) - \dim(\mathbb{F}^{\perp})$

$\underset{=}{\overset{1.}{=}} \dim(\mathbb{E}) - (\dim(\mathbb{E}) - \dim(\mathbb{F}))$

$= \dim(\mathbb{F})$

Donc $\mathbb{F} = (\mathbb{F}^{\perp})^{\perp}$

3. Soit $\mathbb{G}$ un sev de $\mathbb{E}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $\mathbb{G} = \mathbb{F}^{\perp}$

D'après le th 34 : $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$

et par def de $\mathbb{F}^{\perp}$: $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{F} \times \mathbb{G}, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$

et que $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{F} \times \mathbb{G}, \ \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

On a donc $\forall \vec{v} \in \mathbb{G}, \ \vec{v} \in \mathbb{F}^{\perp}$

donc $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{F}^{\perp}$

Mais comme $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ on a :

$$\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G}) \qquad [\text{Chap } 15]$$

donc $\dim(\mathbb{G}) = \dim(\mathbb{E}) - \dim(\mathbb{F})$

$$\overset{1.}{=} \dim(\mathbb{F}^{\perp})$$

Donc $\mathbb{G} = \mathbb{F}^{\perp}$

⚠ Retenir que $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{F} \times \mathbb{G}, \ \vec{u} \perp \vec{v}$

ne donne pas $\mathbb{G} = \mathbb{F}^{\perp}$ mais seulement $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{F}^{\perp}$.

<u>Exemple 1</u> Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique on pose :

$$\mathbb{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \ x+y+z=0\}$$

Alors $\mathbb{F} = \{ \vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \ \vec{u} \perp (1,1,1) \}$

$$= \{(1,1,1)\}^{\perp} = \left(\mathrm{Vect}\,((1,1,1)) \right)^{\perp}$$

Donc $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$ [th 21] et :

$$\mathbb{F}^{\perp} = \left(\left(\mathrm{Vect}((1,1,1)) \right)^{\perp} \right)^{\perp} = \mathrm{Vect}\,((1,1,1))$$

Exemple 2. Contre-exemple à $F \neq (F^{\perp})^{\perp}$

et $F \oplus F^{\perp} \neq E$

$E = \{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ; (\exists n_0 \in \mathbb{N} ; \forall n \geq n_0, u_n = 0) \}$

Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E

* Si $(u, v) \in E^2$ alors la suite $u \times v$ est elle aussi nulle à partir d'un certain rang, donc la série $\sum u_n v_n$ converge.

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini sur $E \times E$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$: c'est une forme.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u, v, w) \in E^3$.

* $\langle v, u \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \times u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times v_n = \langle u, v \rangle$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme symétrique

* $\langle \lambda u + v, w \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) \times w_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n w_n$

$= \lambda . \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme linéaire à gauche.

Comme elle est symétrique : c'est une forme bilinéaire.

$\star$ $\langle u, u\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \geqslant 0$

Donc $\langle .,. \rangle$ est une forme positive

$\star$ $\langle u, u\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = 0$

$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 = 0$ car c'est une somme de termes positifs

$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$

$\iff u = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$

Donc $\langle .,. \rangle$ est une forme définie.

Donc $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.

L'application $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto \varphi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{array}$ est une forme linéaire

donc $\mathbb{F} = \{ u \in \mathbb{E};\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0 \} = \operatorname{Ker}(\varphi)$ est un sev de $\mathbb{E}$.

1. Montrons que $\mathbb{F}^{\perp} = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$

Soit $v \in \mathbb{F}^{\perp}$.

Alors $\forall u \in \mathbb{F}$, $\langle u, v \rangle = 0$ ie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n = 0$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on remarque que

$$u = (-1, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots\dots) \in \mathbb{F}$$

donc $\langle u, v \rangle = 0$ donne $-v_0 + k = 0$.

On a donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $v_k = v_0$.

Donc v est stationnaire.

Or $v \in \mathbb{E}$ donc elle est nulle à partir d'un certain rang, donc $v = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$.

Donc $\mathbb{F}^{\perp} \subseteq \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$

Et d'après le 21 : $\mathbb{F}^{\perp}$ est un sev de $\mathbb{E}$.

Donc $\mathbb{F}^{\perp} = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$.

2. On a donc $(\mathbb{F}^{\perp})^{\perp} = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}^{\perp} = \mathbb{E} \neq \mathbb{F}$

puisque $(1, 1, 0, 0, \dots) \in \mathbb{E}$

mais $(1, 1, 0, 0, \dots) \notin \mathbb{F}$.

De plus $\mathbb{F} \oplus \mathbb{F}^{\perp} = \mathbb{F} \oplus \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\} = \mathbb{F} \neq \mathbb{E}$