Exemple 1 $X =$ "chiffre obtenu avec le 1er dé"

$Y =$ "chiffre obtenu avec le 2nd dé"

Alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

De plus $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, 6]\!]$ donc :

$$\forall (i,j) \in [\![1, 6]\!]^2, \quad \mathbb{P}((X=i) \cap (Y=j)) = \mathbb{P}(X=i) \times \mathbb{P}(Y=j)$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Exemple 2 Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Montrons que :

X est constante $\Longleftrightarrow X \perp\!\!\!\perp X$

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose X constante égale à $a \in \mathbb{R}$.

$X(\Omega) = \{a\}$ et $\mathbb{P}(X=a) = 1$.

$(X=a) \cap (X=a) = (X=a)$

donc $\mathbb{P}((X=a)\cap(X=a)) = \mathbb{P}(X=a) = 1$

et $\mathbb{P}(X=a) \times \mathbb{P}(X=a) = 1^2 = 1$

Donc $X \perp\!\!\!\perp X$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $X \perp\!\!\!\perp X$.

Soit $a \in X(\Omega)$. On a donc

$$\mathbb{P}((X=a)\cap(X=a)) = \mathbb{P}(X=a) \times \mathbb{P}(X=a)$$

donc $\mathbb{P}(X=a) = \mathbb{P}(X=a)^2$

donc $\mathbb{P}(X=a) = 0$ ou 1

Comme $a \in X(\Omega)$ on a $\mathbb{P}(X=a) = 1$.

Comme $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x) = 1$ on a $X(\Omega) = \{a\}$

et donc X est constante.

Exemple 2 Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Montrons que :

X est constante $\Longleftrightarrow X \perp\!\!\!\perp X$

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose X constante égale à $a \in \mathbb{R}$.

$X(\Omega) = \{a\}$ et $\mathbb{P}(X=a) = 1$.

$(X=a) \cap (X=a) = (X=a)$

donc $\mathbb{P}((X=a) \cap (X=a)) = \mathbb{P}(X=a) = 1$

et $\mathbb{P}(X=a) \times \mathbb{P}(X=a) = 1^2 = 1$

Donc $X \perp\!\!\!\perp X$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $X \perp\!\!\!\perp X$.

Soit $a \in X(\Omega)$. On a donc

$$\mathbb{P}((X=a) \cap (X=a)) = \mathbb{P}(X=a) \times \mathbb{P}(X=a)$$

donc $\mathbb{P}(X=a) = \mathbb{P}(X=a)^2$

donc $\mathbb{P}(X=a) = 0$ ou 1

Comme $a \in X(\Omega)$ on a $\mathbb{P}(X=a) = 1$.

Comme $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x) = 1$ on a $X(\Omega) = \{a\}$

et donc X est constante.

<u>dem th 10</u> : Soient A et B deux événements.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose A et B événements indépendants.

$\mathbb{1}_A(\Omega) = \mathbb{1}_B(\Omega) = \{0; 1\}$

On remarque que $(\mathbb{1}_A = 1) = A$

$(\mathbb{1}_A = 0) = \overline{A}$

$(\mathbb{1}_B = 1) = B$

$(\mathbb{1}_B = 0) = \overline{B}$

D'après la prop 16 du chap 14 on sait que :

$A \perp\!\!\!\perp B$, $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$, $\overline{A} \perp\!\!\!\perp B$ et $\overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$

Donc :

* $\mathbb{P}((\mathbb{1}_A = 1) \cap (\mathbb{1}_B = 1)) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) \times \mathbb{P}(\mathbb{1}_B = 1)$
* $\mathbb{P}((\mathbb{1}_A = 1) \cap (\mathbb{1}_B = 0)) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) \times \mathbb{P}(\mathbb{1}_B = 0)$
* $\mathbb{P}((\mathbb{1}_A = 0) \cap (\mathbb{1}_B = 1)) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 0) \times \mathbb{P}(\mathbb{1}_B = 1)$
* $\mathbb{P}((\mathbb{1}_A = 0) \cap (\mathbb{1}_B = 0)) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 0) \times \mathbb{P}(\mathbb{1}_B = 0)$

Donc $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ sont des VAR indépendantes

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ sont des VAR indépendantes.

Donc $\mathbb{P}((\mathbb{1}_A = 1) \cap (\mathbb{1}_B = 1)) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) \times \mathbb{P}(\mathbb{1}_B = 1)$

ie $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

donc A et B sont des événements indépendants.

<u>Lemme</u> Soient $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux VAR indépendantes.

Soient A une partie de $X(\Omega)$ et B une partie de $Y(\Omega)$.

On a :
$$\left((X,Y) \in A \times B\right) = \{\omega \in \Omega ;\ X(\omega) \in A \text{ et } Y(\omega) \in B\}$$
$$= \bigcup_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \left((X=x) \cap (Y=y)\right)$$

donc par additivité de $\mathbb{P}$:
$$\mathbb{P}\left((X,Y) \in A \times B\right) = \sum_{x \in A}\left[\sum_{y \in B} \mathbb{P}\left((X=x) \cap (Y=y)\right)\right]$$
$$\overset{X \perp Y}{=} \sum_{x \in A}\left[\sum_{y \in B} \mathbb{P}(X=x) \times \mathbb{P}(Y=y)\right]$$
$$= \sum_{x \in A}\left[\mathbb{P}(X=x) \times \underbrace{\left[\sum_{y \in B} \mathbb{P}(Y=y)\right]}_{= \mathbb{P}(Y \in B)}\right]$$
$$= \mathbb{P}(Y \in B) \times \left(\sum_{x \in A} \mathbb{P}(X=x)\right)$$
$$= \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)$$

Donc $\mathbb{P}\left((X \in A) \cap (Y \in B)\right) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)$

<u>dem th 11</u> On suppose que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des VAR indépendantes.

Soient $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : Y(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

On pose $U = f(X) = f \circ X$ et $V = g(Y) = g \circ Y$.

Alors $U : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $V : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux VAR.

Montrons qu'elles sont indépendantes.

Soit $u \in U(\Omega)$ et $v \in V(\Omega)$.

$$
\begin{aligned}
\text{Alors } (U = u) &= \{\omega \in \Omega ;\ U(\omega) = u\} \\
&= \{\omega \in \Omega ;\ f(X(\omega)) = u\} \\
&= \{\omega \in \Omega ;\ X(\omega) \in f^{-1}(\{u\})\} \\
&= (X \in \underbrace{f^{-1}(\{u\}) \cap X(\Omega)}_{= A})
\end{aligned}
$$

et de même $(V = v) = (Y \in \underbrace{g^{-1}(\{v\}) \cap Y(\Omega)}_{= B})$

$$
\begin{aligned}
\text{donc } \mathbb{P}((U = u) \cap (V = v)) &= \mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) \\
&\underset{\text{lemme}}{=} \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B) \\
&= \mathbb{P}(U = u) \times \mathbb{P}(V = v).
\end{aligned}
$$

Donc U et V sont indépendantes

Exemple 3 $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ et $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose $S \overset{\text{def}}{=} X + Y$. Alors $S : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On a vu que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = n-k))$$

$$\underset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}(Y = n-k)$$

Donc si X et Y sont indépendantes les lois marginales de X et Y donnent la loi de $S \overset{\text{def}}{=} X + Y$.

dem Th 12 On suppose que $X_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $X_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sont indépendantes, que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et que $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$.

On pose $S \overset{\text{def}}{=} X_1 + X_2$.

On a $X_1(\Omega) = [\![0, n_1]\!]$ et $X_2(\Omega) = [\![0, n_2]\!]$.

Donc $S(\Omega) = [\![0, n_1 + n_2]\!]$

Soit $n \in [\![0, n_1 + n_2]\!]$.

$$\mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left((X_1 = k) \cap (X_2 = n-k)\right)$$

$$\underset{X_1 \perp\!\!\!\perp X_2}{=} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = k) \times \mathbb{P}(X_2 = n-k)$$

$$\underset{\text{grâce aux conventions sur les coefficients binomiaux}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n_1}{k} p^k (1-p)^{n_1 - k} \times \binom{n_2}{n-k} p^{n-k} (1-p)^{n_2 - n + k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k} p^n (1-p)^{n_1 + n_2 - n}$$

$$= p^n (1-p)^{n_1 + n_2 - n} \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k}$$

$$= \binom{n_1 + n_2}{n} p^n (1-p)^{n_1 + n_2 - n}$$ d'après la formule de Vandermonde [TD2 Ex 8 et TD11 Ex 7]

Donc $S \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$

dem th 13 : On a vu le théorème de transfert qui dit que si $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ est une VAR et $f : Z(\Omega) \to \mathbb{R}$

Alors $\mathbb{E}(f(Z)) = \sum_{z \in Z(\Omega)} f(z) \times \mathbb{P}(Z = z)$

En relisant la démonstration on voit que le théorème est encore vrai si $Z : \Omega \to E$ où E est un ensemble quelconque non vide.

En particulier il est encore vrai si $Z : \Omega \to \mathbb{R}^2$ c'est-à-dire pour un couple de VAR.

On applique ce théorème avec le couple de VAR $Z = (X, Y)$ et la fonction $f : \begin{array}{l} Z(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x \times y \end{array}$

On a $\mathbb{E}(f(Z)) = \sum_{z \in Z(\Omega)} f(z) \times \mathbb{P}(Z = z)$

ie $\mathbb{E}(XY) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy \times \mathbb{P}((X, Y) = (x, y))$

car $Z(\Omega) \subseteq X(\Omega) \times Y(\Omega)$

$= \sum_{x \in X(\Omega)} \left[\sum_{y \in Y(\Omega)} xy \times \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) \right]$

Comme X et Y sont indépendantes :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x \in X(\Omega)} \left[\sum_{y \in Y(\Omega)} xy \times \mathbb{P}(X=x) \times \mathbb{P}(Y=y) \right]$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} \left[x \times \mathbb{P}(X=x) \times \underbrace{\sum_{y \in Y(\Omega)} y \times \mathbb{P}(Y=y)}_{=\mathbb{E}(Y)} \right]$$

$$= \mathbb{E}(Y) \times \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X=x)$$

$$= \mathbb{E}(Y) \times \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$$

Exemple 4 : Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left(t^{X+Y}\right)$$

Mais $\forall \omega \in \Omega$, $t^{X(\omega)+Y(\omega)} = t^{X(\omega)} \times t^{Y(\omega)}$

donc $G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left(t^X \times t^Y\right)$

Or X et Y sont indépendantes donc si on note

$f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto t^x \end{array}$ alors $f(X)$ et $f(Y)$ sont aussi

des VA indépendantes d'après le th 11, ie t^X et t^Y sont indépendantes.

D'après le th 13 :

$$G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) \times \mathbb{E}\left(t^Y\right) = G_X(t) \times G_Y(t)$$

Exemple 5 Soient X et Y deux VAR qui suivent une loi de Bernoulli.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose $X \perp Y$.

D'après le th 13 : $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$.

Comme X et Y suivent une loi de Bernoulli il en est de même pour XY.

Donc $\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(X=1)$

$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}(Y=1)$

$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{P}(XY=1)$

mais $(XY=1) = (X=1) \cap (Y=1)$

donc $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{P}((X=1) \cap (Y=1))$

Ainsi $\mathbb{P}((X=1) \cap (Y=1)) = \mathbb{P}(X=1) \times \mathbb{P}(Y=1)$

donc les évènements $(X=1)$ et $(Y=1)$ sont indépendants.

D'après le th 10 les VAR : $\mathbb{1}_{(X=1)}$ et $\mathbb{1}_{(Y=1)}$ sont indépendantes.

Mais $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_{(X=1)}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega)=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$= X(\omega)$

donc $\mathbb{1}_{(X=1)} = X$ et $\mathbb{1}_{(Y=1)} = Y$. Donc X et Y sont indépendantes.