Exemple 1 Urne avec 3 boules numérotées : 1 2 3

On en pioche deux successivement avec remise.

On pose $X_1 =$ "premier numéro pioché"

$X_2 =$ "second numéro pioché"

$Y = \max(X_1, X_2) =$ "plus grand numéro pioché"

On a $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, 6]\!]$

* Pour tout $(i,j) \in [\![1,6]\!]^2$ on a :

$$\mathrm{Card}\big((X_1=i) \cap (X_2=j)\big) = 1$$

or $\mathrm{Card}(\Omega) = 3^2 = 9$

donc $\mathbb{P}\big((X_1=i) \cap (X_2=j)\big) = \frac{1}{9}$

* Pour $(i,j) \in [\![1,6]\!]^2$:

• si $i > j$ alors $(X_1=i) \cap (Y=j) = \emptyset$

donc $\mathbb{P}\big((X_1=i) \cap (Y=j)\big) = 0$

• si $i < j$ alors $(X_1=i) \cap (Y=j) = (X_1=i) \cap (X_2=j)$

donc $\mathbb{P}\big((X_1=i) \cap (Y=j)\big) = \mathbb{P}\big((X_1=i) \cap (X_2=j)\big) = \frac{1}{9}$

• $(X_1=1) \cap (Y=1) = (X_1=1) \cap (X_2=1)$

donc $\mathbb{P}\big((X_1=1) \cap (Y=1)\big) = \mathbb{P}\big((X_1=1) \cap (X_2=1)\big) = \frac{1}{9}$

$$(X_1=2)\cap(Y=2)=\big((X_1=2)\cap(X_2=1)\big)\uplus\big((X_1=2)\cap(X_2=2)\big)$$

donc $\mathbb{P}\big((X_1=2)\cap(Y=2)\big)=\mathbb{P}\big((X_1=2)\cap(X_1=1)\big)+\mathbb{P}\big((X_1=2)\cap(X_2=2)\big)$

$$=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$$

De même :

$$\mathbb{P}\big((X_1=3)\cap(Y=3)\big)=\mathbb{P}\big((X_1=3)\cap(X_2=1)\big)+\mathbb{P}\big((X_1=3)\cap(X_2=2)\big)+\mathbb{P}\big((X_1=3)\cap(X_2=3)\big)$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{3}{9}$$

<u>Exemple 2</u> $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ et $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose $S = X+Y$. Alors $S : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ est aussi une variable aléatoire.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ on a $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (Y=k) = \Omega$

donc $(S=n) = (S=n) \cap \Omega$ car $(S=n) \subseteq \Omega$

$$= (S=n) \cap \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (Y=k) \right)$$

$$= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left((S=n) \cap (Y=k) \right)$$

mais $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall \omega \in \Omega$, $\left(S(\omega) = n \text{ et } Y(\omega) = k \iff X(\omega) = n-k \text{ et } Y(\omega) = k \right)$

donc $(S=n) \cap (Y=k) = (X=n-k) \cap (Y=k)$

donc $(S=n) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left((X=n-k) \cap (Y=k) \right)$

Mais si $k > n$ alors $n-k < 0$ donc $(X=n-k) = \emptyset$

Donc $(S=n) = \bigcup_{k=0}^{n} \left((X=n-k) \cap (Y=k) \right)$

Comme les événements dans l'union sont 2 à 2 incompatibles :

$$\mathbb{P}(S=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left((X=n-k) \cap (Y=k) \right)$$

<u>dem th 4</u> On se donne $(p_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ des réels tels que

$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\ p_{i,j}\geq 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} p_{i,j}\right)=1$.

On se donne aussi des réels 2 à 2 distincts $x_1,\dots,x_n$

et des réels 2 à 2 distincts $y_1,\dots,y_p$.

<u>but</u> Il existe un espace probabilisé $(\Omega,\mathbb{P})$ et une application $Z:\Omega\to\mathbb{R}^2$ tels que

$Z(\Omega)=\{(x_i;y_j)\in\mathbb{R}^2;\ (i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]\}$

et $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\ \mathbb{P}(Z=(x_i;y_j))=p_{i,j}$

On pose $\Omega=[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ et on choisit l'unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω vérifiant :

$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\ \mathbb{P}(\{(i,j)\})=p_{i,j}$ [th 7 chap 14]

On définit ensuite $Z:\Omega\to\mathbb{R}^2$ par

$\forall (i,j)\in\Omega,\ Z(i,j)=(x_i,y_j)$

On note $p_1:\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\(x,y)\mapsto x\end{array}$ et $p_2:\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\(x,y)\mapsto y\end{array}$

* Si on pose $X=p_1\circ Z:\Omega\to\mathbb{R}$ et $Y=p_2\circ Z:\Omega\to\mathbb{R}$

alors X et Y sont des VAR

De plus $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (p_1(x,y), p_2(x,y)) = (x, y)$

donc $\forall \omega \in \Omega, \ (p_1(Z(\omega)), p_2(Z(\omega))) = Z(\omega)$

ie $(X(\omega), Y(\omega)) = Z(\omega)$

donc $Z = (X, Y)$ donc Z est un couple de VAR.

* $Z(\Omega) = \{(x_i; y_j) \in \mathbb{R}^2, (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]\}$

* Pour tout $(i,j) \in \Omega$:

$(Z = (x_i, y_j)) = \{\omega \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] ; \ Z(\omega) = (x_i, y_j)\}$

$= \{(i,j)\}$

donc $\mathbb{P}(Z = (x_i, y_j)) = \mathbb{P}(\{(i,j)\}) = p_{ij}$

Example 3

On pose $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $p_{i,j} \overset{\text{def}}{=} \frac{i+j}{n^2(n+1)}$

On a

* $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $p_{i,j} \geq 0$
* $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{i+j}{n^2(n+1)} \right)$

Pour $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{i+j}{n^2(n+1)} = \frac{1}{n^2(n+1)} \times \left(\sum_{j=1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n} j \right)$$

$$= \frac{1}{n^2(n+1)} \times \left(ni + \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{i}{n(n+1)} + \frac{1}{2n}$$

donc $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n(n+1)} + \frac{1}{2n} \right)$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2n} \times n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Donc il existe un couple de VAR (X,Y) tq :

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathbb{P}((X=i) \cap (Y=j)) = \frac{i+j}{n^2(n+1)}$