Chapitre 4

Généralités sur les fonctions numériques

Sommaire

1 Étude d'une fonction réelle d'une variable réelle

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1.1 Fonction réelle d'une variable réelle

Définition 1 – Fonction réelle d'une variable réelle

On appelle fonction réelle d'une variable réelle toute application $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, où A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Pour simplifier on dira que f est une fonction réelle.

⚠ ATTENTION : il faut veiller à ne pas confondre les notations f et $f(x)$. f désigne l'application et $f(x)$ désigne l'image de x. L'application f peut être aussi notée $x \longmapsto f(x)$.

1.2 Ensemble de définition

Définition 2 – Ensemble de définition

L'ensemble définition d'une fonction réelle f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$, noté $\mathscr{D}_f$, formé des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'expression $f(x)$ est définie.

✎ ***Exemple.*** $f(x) = \sqrt{x}$ donne $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$.

✎ ***Exemple.*** $f(x) = \ln(x)$ donne $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$.

✎ ***Exemple.*** $f(x) = \mathrm{e}^x$ donne $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.

✎ ***Exemple.*** $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ donne $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$.

1.3 Représentation graphique de f

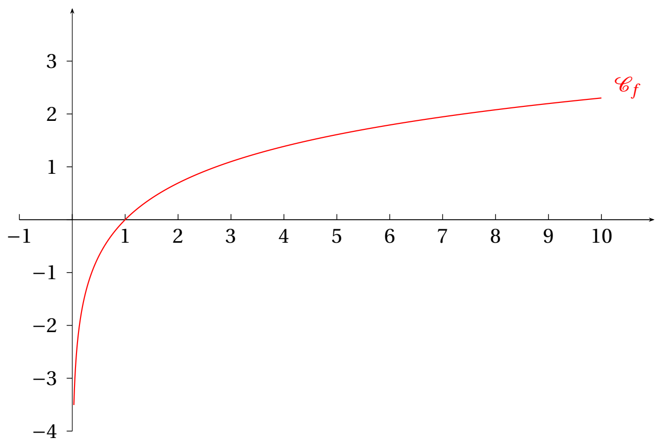
Définition 3 – Graphe de f

Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$. Le graphe de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, noté G_f, défini par :

$$G_f = \left\{\left(x, f(x)\right) / \ x \in \mathscr{D}_f\right\}$$

Représenter f c'est représenter G_f dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. On obtient une courbe du plan, appelée représentation graphique de f, notée $\mathscr{C}_f$.

✎ ***Exemple.*** $f : x \longmapsto \ln(x)$ donne $G_f = \{(x, \ln x) / \ x > 0\}$.



Définition 4 – Périodicité

Soient $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $T > 0$.
La fonction f est dite périodique de période T, ou encore T-périodique, lorsque :
(i) $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ x + T \in \mathscr{D}_f$
(ii) $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(x+T) = f(x)$.

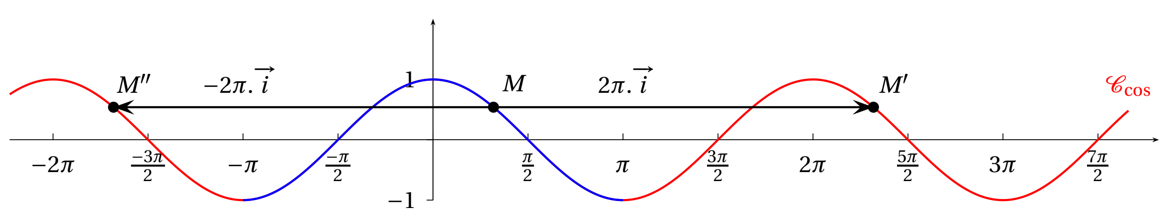
On peut remarquer que si $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, la condition (i) est automatiquement vérifiée. On montre facilement que la condition (ii) entraîne que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(x + kT) = f(x)$$

Interprétation graphique de la périodicité. Si f est T-périodique alors son graphe est invariant par toute translation de vecteur $kT.\overrightarrow{i}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Il suffit donc d'étudier f sur un intervalle de longueur T, ie du type $[a, a+T]$ avec $a \in \mathbb{R}$ (on choisit souvent $[0, T]$ ou $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$). Le reste du graphe de f se déduit ensuite par translations de vecteurs $kT.\overrightarrow{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

✎ ***Exemple.*** La fonction cos est 2π-périodique.



Définition 5 – Parité

Soient $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subseteq \mathscr{D}_f$.

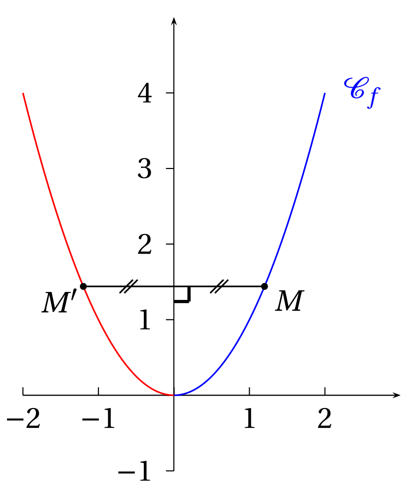
1. La fonction f est dite paire sur A lorsque :
   (i) $\forall x \in A, -x \in A$
   (ii) $\forall x \in A, f(-x) = f(x)$.
2. La fonction f est dite impaire sur A lorsque :
   (i) $\forall x \in A, -x \in A$
   (ii) $\forall x \in A, f(-x) = -f(x)$.

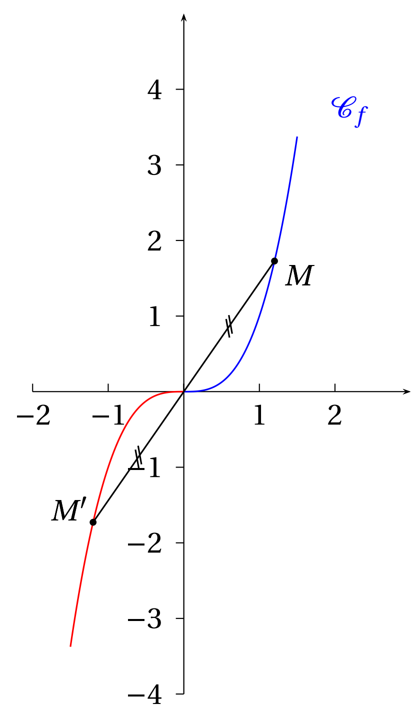
Évidemment si $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, la condition (i) est automatiquement vérifiée.

Interprétation graphique de la parité

1. Si f est paire alors son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $(0y)$.
   On peut donc restreindre l'étude à $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}^+$ ou $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}^-$.
2. Si f est impaire alors son graphe est symétrique par rapport au point O.
   On peut donc restreindre l'étude à $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}^+$ ou $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}^-$.

✎ ***Exemple.*** La fonction $x \longmapsto x^2$ est paire sur $\mathbb{R}$, et $x \longmapsto x^3$ est impaire sur $\mathbb{R}$.





1.4 Opérations sur les fonctions numériques

Définition 6 – Somme de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur le même intervalle I.
La fonction $f+g$ est définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle vérifie :

$$\forall x \in I, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

⚠ Le signe + peut donc désigner différentes additions : celle des nombres ou celle des fonctions.

Définition 7 – Produit de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur le même intervalle I.
La fonction $f \times g$ est définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle vérifie :

$$\forall x \in I, \quad (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

Souvent la fonction $f \times g$ est noté fg.

La somme et le produit de fonctions numériques héritent des propriétés de la somme et du produit de nombres : associativité, commutativité, distributivité etc...

Définition 8 – Composée de deux fonctions

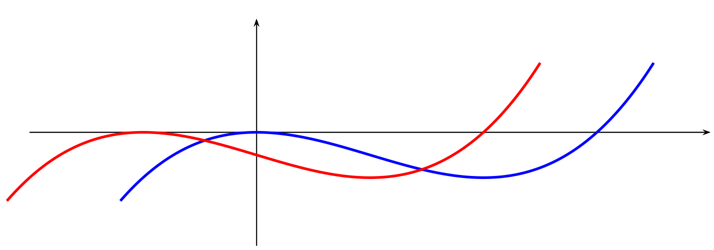
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle noté J.
Soit g une fonction numérique définies sur l'intervalle J.
La fonction $g \circ f$ est définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle vérifie :

$$\forall x \in I, \quad (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

Cette opération est associative mais non commutative : même si les deux composées $g \circ f$ et $f \circ g$ sont possibles, il n'y a aucune rauson qu'elles soient égales.

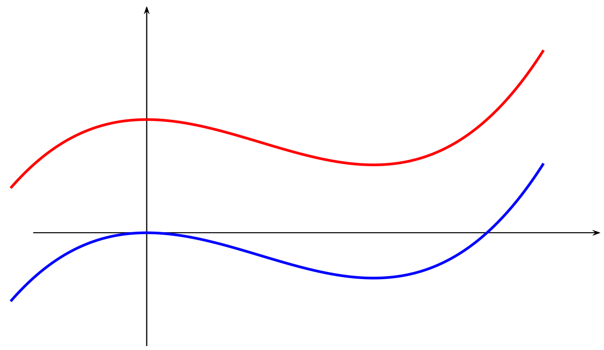
Certaines opérations simples ont une bonne interprétation géométrique.

Représentation graphique de $x \longmapsto f(x+a)$
Soit $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de la fonction $x \longmapsto f(x+a)$ se déduit du graphe de f par translation de vecteur $-a\,\overrightarrow{i}$.



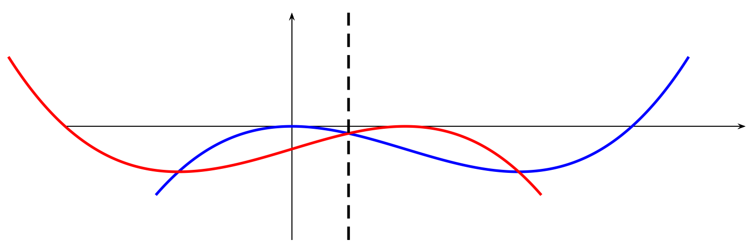
Représentation graphique de $x \longmapsto f(x)+a$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de la fonction $x \longmapsto f(x)+a$ se déduit du graphe de f par translation de vecteur $a\overrightarrow{j}$.



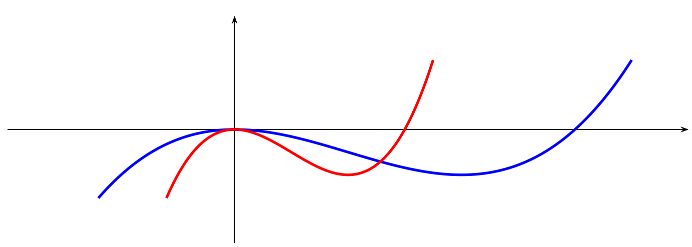
Représentation graphique de $x \longmapsto f(a-x)$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de la fonction $x \longmapsto f(a-x)$ se déduit du graphe de f par symétrie d'axe $x = \dfrac{a}{2}$.



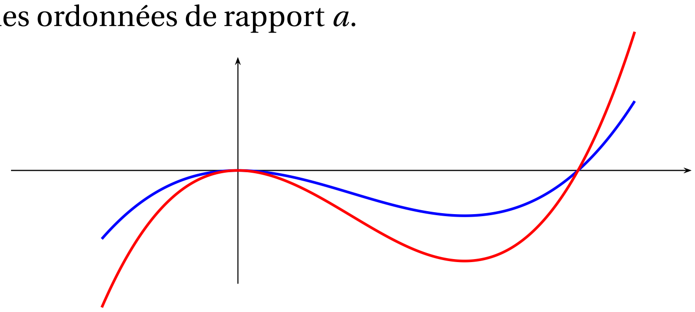
Représentation graphique de $x \longmapsto f(ax)$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de la fonction $x \longmapsto f(ax)$ se déduit du graphe de f par « contraction » ou « dilatation » selon l'axe des abscisses de rapport $\dfrac{1}{a}$.



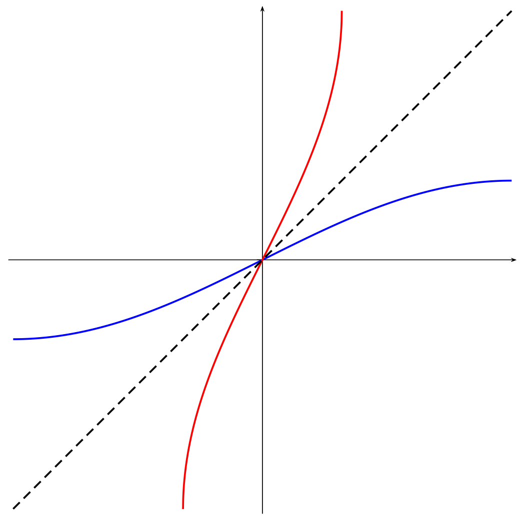
Représentation graphique de $x \longmapsto af(x)$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de la fonction $x \longmapsto af(x)$ se déduit du graphe de f par « contraction » ou « dilatation » selon l'axe des ordonnées de rapport a.



Représentation graphique d'une bijection réciproque

Si f est une bijection d'un intervalle I vers un intervalle J, alors elle admet une bijection réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$. Son graphe se déduit de celui de f grâce à la symétrie d'axe $y = x$.



1.5 Formules de dérivation

Pour le moment nous admettrons la dérivabilité des fonctions numériques étudiées.

On se donne donc f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle I.

L'existence de la dérivée en un point $x_0 \in I$ s'interprète graphiquement par l'existence d'une droite tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $\big(x_0, f(x_0)\big)$. Son équation est la suivante :

$$y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$$

Si f et g sont deux fonctions numériques dérivables sur un intervalle I, et si λ est une constante réelle, alors les fonctions $f + g$, λf et fg sont elles aussi dérivables sur I et on a, pour tout $x \in I$:

$$\begin{array}{rcl} (f+g)'(x) & = & f'(x) + g'(x) \\ (\lambda f)'(x) & = & \lambda f'(x) \\ (fg)'(x) & = & f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{array}$$

Si on suppose de plus que la fonction g ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont elles aussi dérivables sur I et on a, pour tout $x \in I$:

$$\begin{array}{rcl} \left(\dfrac{1}{g}\right)'(x) & = & -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2} \\ \left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) & = & \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \end{array}$$

Proposition 9 – Dérivée d'une composée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J.
Soit g une dérivable sur J.
Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I, et :

$$\forall x \in I, \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'\big(f(x)\big)$$

On en déduit la formule de dérivée d'une bijection réciproque.

Proposition 10 – Dérivée d'une bijection réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
On note J son intervalle image : $J = f(I)$.
La fonction f est alors bijective de I vers J, et admet une bijection réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$.
Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et :

$$\forall y \in J, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}$$

Si f est plusieurs fois dérivable sur I, on peut définir ses dérivées successives f', $f'' = (f')'$, ...

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si f est n fois dérivable sur un intervalle I, on note $f^{(n)}$ sa dérivée n fois.

On adopte aussi la convention $f^{(0)} = f$. On a la formule de récurrence $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

1.6 Monotonie

Définition 11 – Fonction croissante

Soit f fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que f est *croissante sur I* lorsque :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

Dans ce cas la réciproque est fausse, mais on a tout de même :

$$f(x) < f(y) \Longrightarrow x < y$$

⚠ Si on a seulement l'inégalité large $f(x) \leq f(y)$, alors on ne peut pas comparer x et y.

Définition 12 – Fonction strictement croissante

Soit f fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que f est *strictement croissante sur I* lorsque :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

La réciproque est vraie :

$$x < y \Longleftrightarrow f(x) < f(y)$$

On peut utiliser des inégalités larges :

$$x \leq y \Longleftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

Il est clair qu'une fonction strictement croissante sur I est un cas particulier de fonction croissante sur I.

On comprend donc, à la vue de ces propriétés, pourquoi on préfèrera utiliser des fonctions strictement croissantes à des fonctions croissantes.

✎ ***Exemple.*** $x \longmapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, donc croissante sur $\mathbb{R}^+$.

✎ ***Exemple.*** $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Définition 13 – Fonction décroissante/strictement décroissante

Soit f fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. f est *décroissante sur I* lorsque :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$

2. f est *strictement décroissante sur I* lorsque :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$$

✎ ***Exemple.*** $x \longmapsto x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$, donc décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

Définition 14 – Fonction monotone/strictement monotone

Soit f fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. f est dite *monotone sur I* lorsqu'elle est croissante ou décroissante sur I.
2. f est dite *strictement monotone sur I* lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

✎ ***Exemple.*** $x \longmapsto x^2$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

Résolution graphique d'équations ou d'inéquations

Pour des fonctions non monotones, on peut utiliser leur représentation graphique pour résoudre des équation ou des inéquations.

✎ ***Exemple.*** Résoudre $\dfrac{1}{x} \leq 1$.

✎ ***Exemple.*** Si $a > 0$, résoudre $x^2 = a$, $|x| = a$, $\sqrt{x} = a$, $x^2 \leq a$, $|x| \leq a$, $\sqrt{x} \leq a$, $x^2 \geq a$, $|x| \geq a$ et $\sqrt{x} \geq a$.

✎ ***Exemple.*** Résoudre $\sqrt{x+1} \leq x-1$ et $\sqrt{x+1} \geq x-1$.

On rappelle deux théorèmes bien connus qui seront démontrés dans le chapitre sur les fonctions numériques dérivables.

Théorème 15 – Monotonie et signe de la dérivée

On suppose que f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. f est croissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0$
2. f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \leq 0$
3. f est constante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) = 0$

Dans le théorème suivant, on dira qu'une propriété pour tout réel x dans un intervalle I *sauf en des points isolés*, lorsqu'il existe une partie (finie ou infinie) A de $\mathbb{N}$ et une famille de points $(x_k)_{k\in A}$ dans I tels que la propriété est vrai pour tout $x \in I \backslash \{x_k; k \in A\}$.

Théorème 16 – Stricte monotonie et signe de la dérivée

On suppose que f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement en des points isolés $\Longrightarrow f$ strictement croissante sur I
2. $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement en des points isolés $\Longrightarrow f$ strictement décroissante sur I

⚠ ATTENTION : si f est strictement croissante sur un intervalle I, on ne peut pas dire que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, comme le montre l'exemple de la fonction $x \longmapsto x^3$.

✎ ***Exemple.*** La fonction $f : x \longmapsto x - \ln(1+x^2)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

✎ ***Exemple.*** La fonction $f : x \longmapsto x + \cos(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème 17 – Monotonie et bijection réciroque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Alors sa bijection réciproque f^{-1} est strictement monotone sur J, de même sens de variation que f.

1.7 Extremums d'une fonction

Dans tout le paragraphe, f est une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 18 – Fonction majorée

On dit que f est *majorée* sur I lorsque :

$$\exists M \in \mathbb{R}; \forall x \in I, f(x) \leq M$$

Le réel M est alors appelé *majorant* de f sur I.

Dans ce cas, le réel M n'est pas unique puisque tout réel $M' \geq M$: $\forall x \in I$, $f(x) \leq M \leq M'$.

On ne dit donc pas **le** majorant, mais **un** majorant de f sur l'intervalle I.

✎ ***Exemple.*** $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est majorée sur $\mathbb{R}$.

Définition 19 – Fonction minorée

On dit que f est *minorée* sur I lorsque :

$$\exists m \in \mathbb{R}; \forall x \in I, m \leq f(x)$$

Le réel m est alors appelé *minorant* de f sur I.

Le réel m n'est pas unique.

✎ ***Exemple.*** $x \longmapsto x^2 - 2x + 2$ est minorée sur $\mathbb{R}$.

Si on note $-f$ la fonction $x \longmapsto -f(x)$ on peut facilement vérifier que :

$$f \text{ est minorée sur } I \iff -f \text{ est majorée sur } I$$

Définition 20 – Fonction bornée

On dit que f est *bornée* sur I lorsqu'elle est à la fois majorée **et** minorée sur I :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 ; \forall x \in I, m \leq f(x) \leq M$$

Dans les inégalités, on a souvent besoin de manipuler des nombres positifs. De plus la définition précédente demande un double travail : trouver un majorant et un minorant. On préfèrera donc utiliser la caractérisation suivante d'une fonction bornée.

Proposition 21 – Caractérisation des fonctions bornées

On a :

$$f \text{ est bornée sur } I \iff |f| \text{ est majorée sur } I$$

✎ ***Exemple.*** cos et sin sont bornées sur $\mathbb{R}$.

✎ ***Exemple.*** $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{1+x^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Définition 22 – Maximum global

Soit $x_0 \in I$.
On dit que f admet un *maximum global* en x_0 sur I, lorsque f est majorée sur I par $f(x_0)$:

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Une fonction qui admet un maximum global est une fonction majorée.

⚠ Une fonction majorée peut ne pas avoir de maximum global.

✎ ***Exemple.*** La fonction $x \longmapsto 1 - \dfrac{1}{x}$ est majorée sur $I =]0, +\infty[$ mais n'a pas de maximum global sur I.

Définition 23 – Minimum global

Soit $x_0 \in I$.
On dit que f admet un *minimum global* en x_0 sur I, lorsque f est minorée sur I par $f(x_0)$:

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq f(x_0)$$

Une fonction qui admet un minimum global est une fonction minorée.

On peut remarquer que : f a un minimum global en x_0 sur I si, et seulement si, $-f$ a un maximum global en x_0 sur I.

Définition 24 – Extremum global

Soit $x_0 \in I$.
On dit que f admet un *extremum global* en x_0 sur I, lorsque f admet en x_0 un maximum global ou un minimum global sur I.

Ces notions peuvent être *localisées*.

Définition 25 – Maximum local

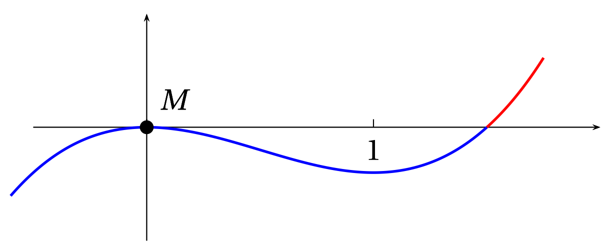
Soit $x_0 \in I$.
On dit que f admet un *maximum local* en x_0 sur I, lorsqu'il existe $\delta > 0$ tel que f est majorée par $f(x_0)$ sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I$:

$$\exists \delta > 0;\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I, \quad f(x) \leq f(x_0)$$

On voit facilement que si f a un maximum *global* en x_0 sur I, alors f a un maximum *local* en x_0 sur I.

⚠ La réciproque est fausse : f peut avoir un maximum *local* en x_0 sur I, sans avoir de maximum *global* en x_0 sur I.

✎ ***Exemple.*** La fonction $x \longmapsto (2x^3 - 3x^2)/5$ a un maximum local en 0 sur $\mathbb{R}$, qui n'est pas un maximum global sur $\mathbb{R}$.



Définition 26 – Minimum local

Soit $x_0 \in I$.
On dit que f admet un *minimum local* en x_0 sur I, lorsqu'il existe $\delta > 0$ tel que f est minorée par $f(x_0)$ sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I$:

$$\exists \delta > 0;\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I, \quad f(x) \geq f(x_0)$$

Si f a un minimum *global* en x_0 sur I, alors f a un minimum *local* en x_0 sur I. La réciproque est fausse.

On peut remarquer que : f a un minimum local en x_0 sur I si, et seulement si, $-f$ a un maximum local en x_0 sur I.

Définition 27 – Extremum local

Soit $x_0 \in I$.
On dit que f admet un *extremum local* en x_0 sur I, lorsque f admet en x_0 un maximum local ou un minimum local sur I.

Pour simplifier la recherche d'extremums d'une fonction, on utilise sa dérivée (lorsque c'est possible).

Si I est un intervalle, on notera $\overset{\circ}{I}$ son *intérieur*, c'est-à-dire l'intervalle I privé de ses bornes.

Théorème 28 – Condition nécessaire d'extremum local

Soit f fonction dérivable sur un intervalle I et telle que :

(i) f admet un extremum local en $x_0 \in I$

(ii) $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, ie $x_0 \in I$ et x_0 n'est pas une borne de I.

Alors $f'(x_0) = 0$.
La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est donc horizontale.

⚠ La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $x \longmapsto x^3$ en 0.

⚠ L'hypothèse $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ est essentielle, comme le montre l'exemple de la fonction $x \longmapsto x$ sur $[0,1]$.

Ce résultat donne donc des points x_0 candidats à être des points où f a un extremum local. On les appelle **points critiques** de f ; ils vérifient $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ et $f'(x_0) = 0$.

Il faut ensuite vérifier, pour chaque point critique, si on trouve bien un extremum local.

Pour terminer l'étude, il faut déterminer si les bornes de l'intervalle donnent d'autres extremums (ces points exclus de la recherche précédente).

En pratique, tout est résumé dans le *tableau de variations* de f.

✎ ***Exemple.*** Déterminer les extremums locaux et globaux de la fonction $f : x \longmapsto x^2$ sur $[-1,2]$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer les extremums locaux et globaux de la fonction $f : x \longmapsto -8x^3 + 2x^4 + 8x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $[3/2, +\infty[$.

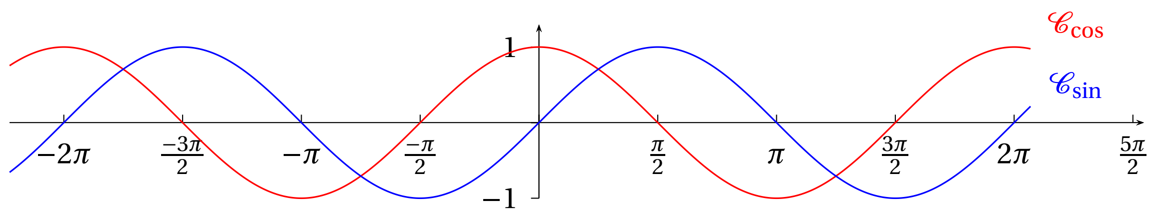
2 Fonctions usuelles

2.1 Fonctions trigonométriques

Les fonctions cos et sin sont dérivables (donc continues) sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

Sur leur représentation graphique, on retrouve que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$:



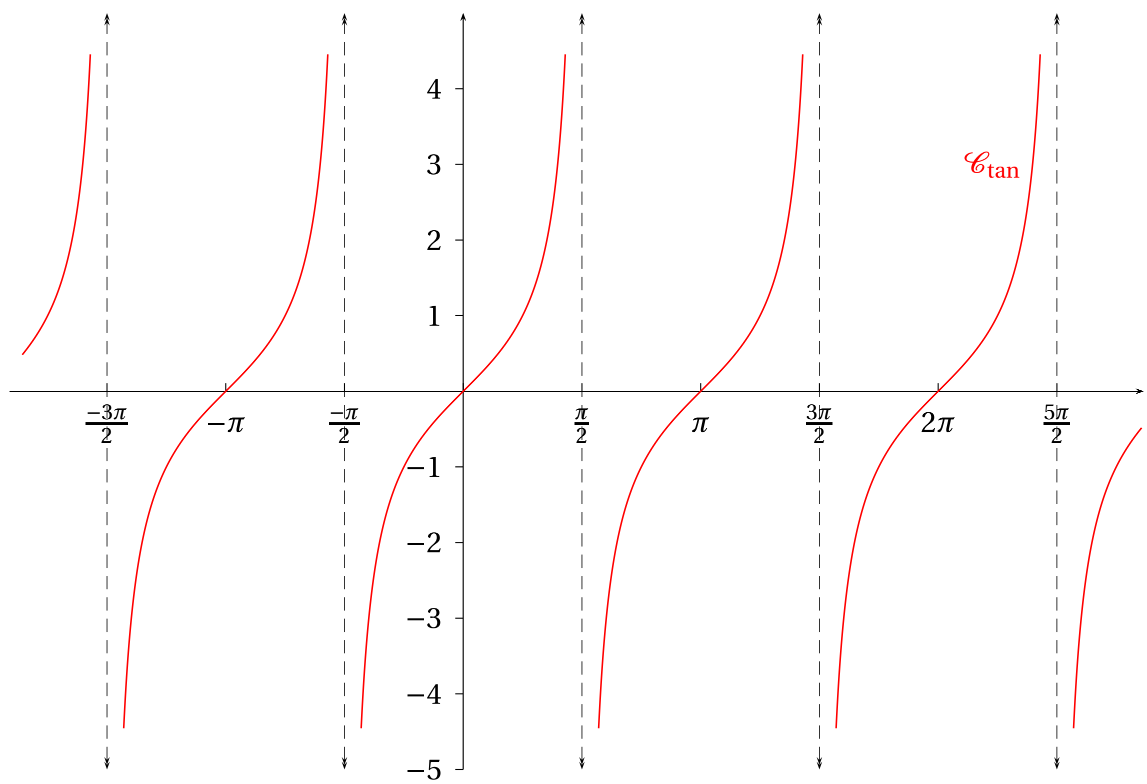
Proposition 29 – Limites usuelles

1. Sans forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0 = \sin(0)$ et $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1 = \cos(0)$
2. Avec forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

La fonction tan est dérivable (donc continue) sur $\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ et :

$$\forall x \in \mathscr{D}_{\tan}, \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$$

Représentation graphique :



Proposition 30 – Limites usuelles

1. Sans forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to 0} \tan(x) = 0 = \tan(0)$
2. Avec forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$

2.2 Fonctions logarithmes et exponentielles

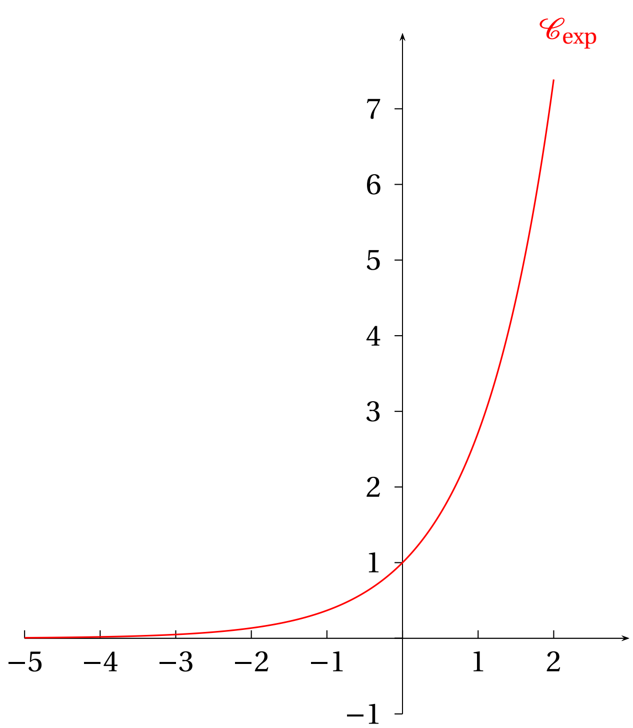
La fonction exponentielle est, pour le moment, définie comme étant l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée, et prenant la valeur 1 en 0. On la note exp ou $x \longmapsto \mathrm{e}^x$.

Proposition 31 – Propriétés de la fonction exponentielle

1. $\forall x \in \mathbb{R}\,,\quad \mathrm{e}^x > 0 \quad$ et donc $\quad \mathrm{e}^x \neq 0$
2. $\mathrm{e}^0 = 1$
3. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\quad \mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b,\quad \mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a} \quad$ et $\quad \mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$
4. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\quad \left(\mathrm{e}^a\right)^n = \mathrm{e}^{na}$
5. $\forall x \in \mathbb{R},\quad \left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x$

Ainsi on a $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$, $\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \ldots$

Représentation graphique :



Proposition 32 – Limites usuelles

1. Sans forme indéterminée :
$$\lim_{x\to 0} e^x = 1 = e^0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$
2. Avec forme indéterminée :
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

La fonction exp est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
exp	0 $\nearrow$	$+\infty$

D'après le théorème de la bijection monotone, elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$.

On note $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ sa bijection réciproque. Cette fonction est appelée logarithme népérien.

On démontrera dans le chapitre sur la dérivabilité qu'elle est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par définition de la bijection réciproque, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \ln\left(e^x\right) = x$ et $\forall x > 0, e^{\ln(x)} = x$. De plus :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, \quad e^x = y \iff x = \ln y$$

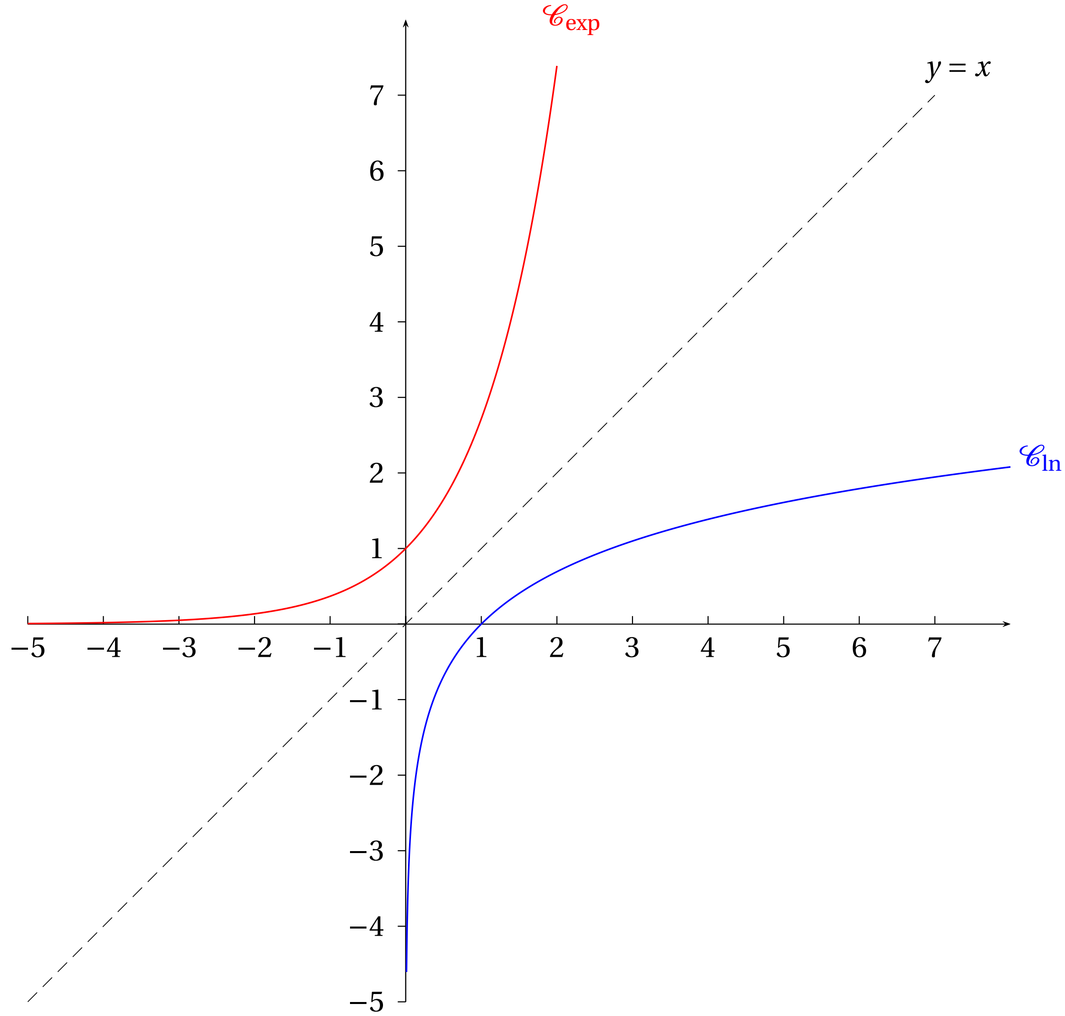
Proposition 33 – Propriétés de la fonction logarithme népérien

1. $\ln(x) = 0 \iff x = 1$ et $\ln(x) = 1 \iff x = e$
2. $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
3. $\forall a > 0, \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) = n\ln(a)$
4. $\forall x > 0, \left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x}$

Proposition 34 – Limites usuelles

1. Sans forme indéterminée :
$$\lim_{x\to 1} \ln(x) = 0 = \ln(1) \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$
2. Avec forme indéterminée :
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

Les courbes représentatives de exp et ln sont symétriques par rapport à $y = x$:



2.3 Fonctions logarithmes et exponentielles en base a

Soit $a > 0$ tel que $a \neq 1$, ie $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$. On définit les fonctions logarithmes et exponentielles en base a par :

$$\forall x > 0, \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$$

Pour $a = \mathrm{e}$, on retrouve les fonctions logarithme népérien et exponentielle.

On peut montrer qu'elles sont bijections réciproques l'une de l'autre :

$$\forall x > 0, \quad a^{\log_a(x)} = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \log_a\left(a^x\right) = x$$

✎ ***Exemple.*** $\log_2(256) = \log_2(2^8) = 8$

On utilisera principalement que : $\forall n \in \mathbb{N}, \log_{10}(10^n) = \log_2(2^n) = n$.

La fonction $\log_a$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée :

$$\forall x > 0, \quad \log_a'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$$

La fonction $x \longmapsto a^x$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(a^x\right)' = \ln(a)\, a^x$$

Ces formules permettent l'étude du signe de la dérivée, puis des variations de la fonction.
⚠ Pour dériver $x \longmapsto u(x)^{v(x)}$, il faut revenir à la définition $u(x)^{v(x)} = \mathrm{e}^{v(x)\times\ln\left(u(x)\right)}$.

✎ ***Exemple.*** Calculer la dérivée de x^x.

2.4 Fonctions puissances réelles

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction puissance α est définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0 \quad x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$$

Si $\alpha > 0$, on pose aussi $0^\alpha = 0$. De plus $0^0 = 1$.

Donc si $\alpha \geq 0$ la fonction puissance α est définie sur $\mathbb{R}^+$.

On peut vérifier qu'on généralise ainsi sur $\mathbb{R}_+^*$ les fonctions puissances entières, et racines n-ièmes, à des puissances quelconques.

⚠ ATTENTION : la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est définie **au moins** sur $]0, +\infty[$. Par exemple la fonction $x \longmapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier!! De plus la formule $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\ln(x)}$ n'est intéressante que si $\alpha \notin \mathbb{Z}$: par exemple écrire $x^2 = \mathrm{e}^{2\ln(x)}$ n'est pas plus simple que $x^2 = x \times x$.

Les propriétés algébriques sont inchangées.

Proposition 35 – Propriétés des fonctions puissances

On se donne $x > 0$, $y > 0$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

1. $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$, $\dfrac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$ et $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$;
2. $\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta} = \left(x^\beta\right)^\alpha$;
3. $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = y^\alpha x^\alpha = (yx)^\alpha$.

La fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est dérivable (donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$), de dérivée :

$$\forall x > 0, \quad \left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

On en déduit qu'elle est strictement croissante si $\alpha > 0$, strictement décroissante si $\alpha < 0$ (et constante égale à 1 si $\alpha = 0$).

Il faut connaître par coeur les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

et :

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

On a les tableaux de variations :

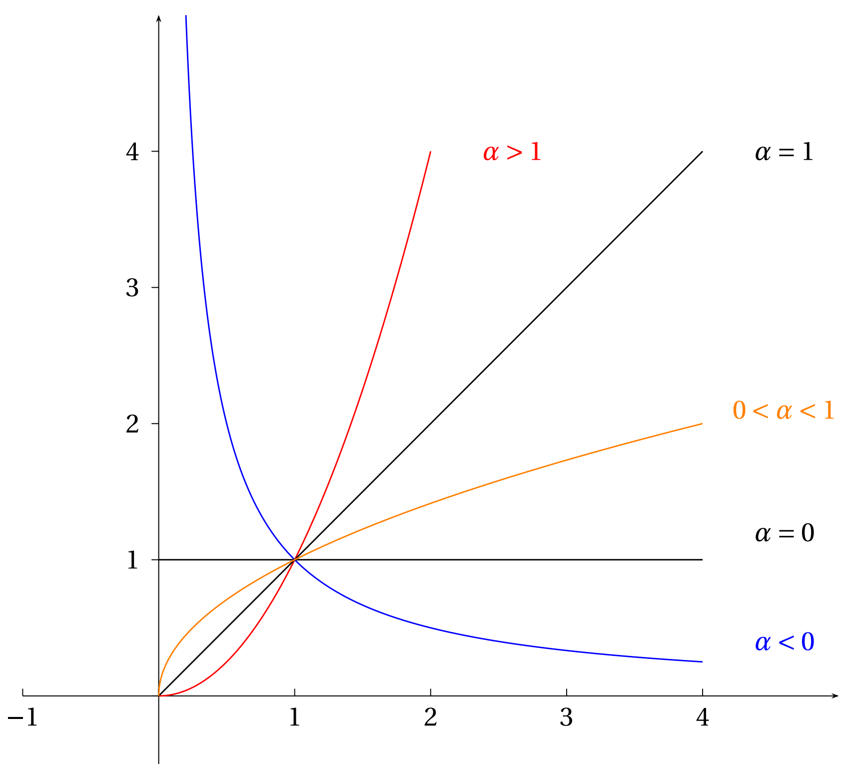
$\boxed{\text{Cas } \alpha > 0}$

x	0	$+\infty$
$x \longmapsto x^\alpha$	$0 \nearrow$	$+\infty$

$\boxed{\text{Cas } \alpha < 0}$

x	0	$+\infty$
$x \longmapsto x^\alpha$	$+\infty \searrow$	0

et les représentations graphiques (les cas $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$ seront étudiés dans le chapitre sur la dérivabilité) :



Pour $\alpha > 0$, la fonction $f : x \longmapsto x^\alpha$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ donc d'après le théorème de la bijection monotone, elle est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$. De plus pour x et y réels positifs :

$$x^\alpha = y \iff x = y^{1/\alpha}$$

donc la bijection réciproque de $x \longmapsto x^\alpha$ est $y \longmapsto y^{1/\alpha}$.

Pour $\alpha < 0$, la fonction $f : x \longmapsto x^{\alpha}$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$ donc d'après le théorème de la bijection monotone, elle est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$. De plus pour x et y réels strictement positifs :

$$x^{\alpha} = y \Longleftrightarrow x = y^{1/\alpha}$$

donc la bijection réciproque de $x \longmapsto x^{\alpha}$ est $y \longmapsto y^{1/\alpha}$.

2.5 Croissances comparées

On peut montrer que pour tout $x > 0$: $\ln(x) \leq x - 1$ et donc $\ln(x) \leq x$.

Soit $\alpha > 0$. Si $x > 0$ on a $x^{\alpha/2} > 0$, donc l'inégalité précédente donne : $\ln(x) \leq \dfrac{2}{\alpha} x^{\alpha/2}$.

On en déduit que pour $x \geq 1$: $0 \leq \dfrac{\ln(x)}{x^{\alpha}} \leq \dfrac{2}{\alpha} x^{-\alpha/2}$.

Le théorème des gendarmes permet de conclure que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\alpha}} = 0$.

Plus généralement si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$: $\dfrac{(\ln x)^{\beta}}{x^{\alpha}} = \left(\dfrac{\ln x}{x^{\alpha/\beta}}\right)^{\beta}$.

On obtient le premier résultat suivant.

Théorème 36 – Croissances comparées

Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$: $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^{\beta}}{x^{\alpha}} = 0$

En posant $x = \dfrac{1}{X}$ on obtient un résultat analogue en 0^+.

Théorème 37 – Croissances comparées

Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$: $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} |\ln x|^{\beta} x^{\alpha} = 0$

D'autre part pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$: $\dfrac{e^{\alpha x}}{x^{\beta}} = e^{x\left(\alpha - \beta \frac{\ln x}{x}\right)}$.

Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ on obtient un nouvelle croissance comparée.

Théorème 38 – Croissances comparées

Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$: $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^{\beta}} = +\infty$

En posant $x = -X$ on obtient un dernier résultat.

Théorème 39 – Croissances comparées

Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$: $\lim_{x \to -\infty} |x|^{\beta} e^{\alpha x} = 0$

De manière mnémotechnique, on peut retenir que : ln $\ll$ puissance $\ll$ exp

2.6 Fonctions sinus et cosinus hyperboliques

On appelle fonctions *sinus hyperbolique* et *cosinus hperbolique* les fonctions sh et ch définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

La fonction sh est impaire, et la fonction ch est paire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{sh}(-x) = -\text{sh}(x) \quad \text{et} \quad \text{ch}(-x) = \text{ch}(x)$$

On a $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}\, x \geq 1 \quad$ et $\quad sh(x) \geq 0 \iff x \geq 0.$

Ces deux fonctions sont dérivables (donc continues) sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (\text{sh})'(x) = \text{ch}(x) \quad \text{et} \quad (\text{ch})'(x) = \text{sh}(x)$$

D'autre part :

$$\lim_{x \to +\infty} \text{sh}(x) = \lim_{x \to +\infty} \text{ch}(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} \text{sh}(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} \text{ch}(x) = +\infty$$

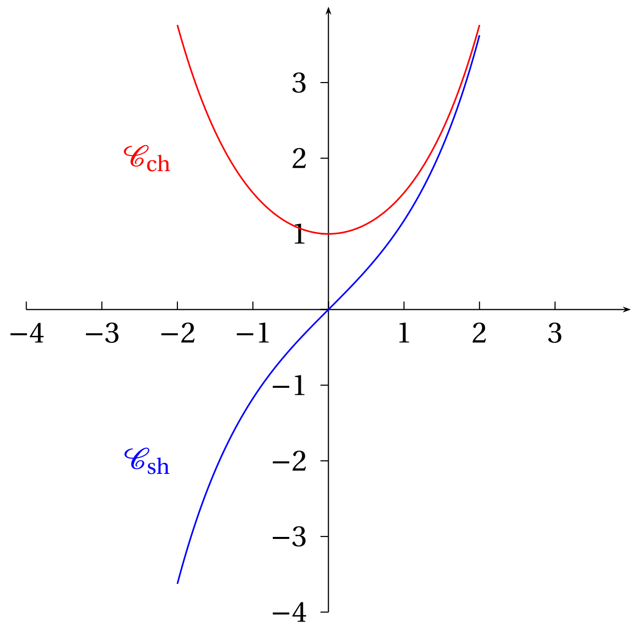
On a donc le tableau de variation suivant pour ch :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{sh}(x)$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

et pour sh :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{ch}(x)$			$+$		
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Leurs représentation graphiques :



2.7 Fonctions circulaires réciproques

Les fonctions circulaires ne sont évidemment pas bijectives sur tout leur ensemble de définition, mais certaines restrictions convenablement choisies peuvent l'être. Les bijections réciproques correspondantes définissent de nouvelles fonctions qui sont très importantes, notamment en calcul intégral.

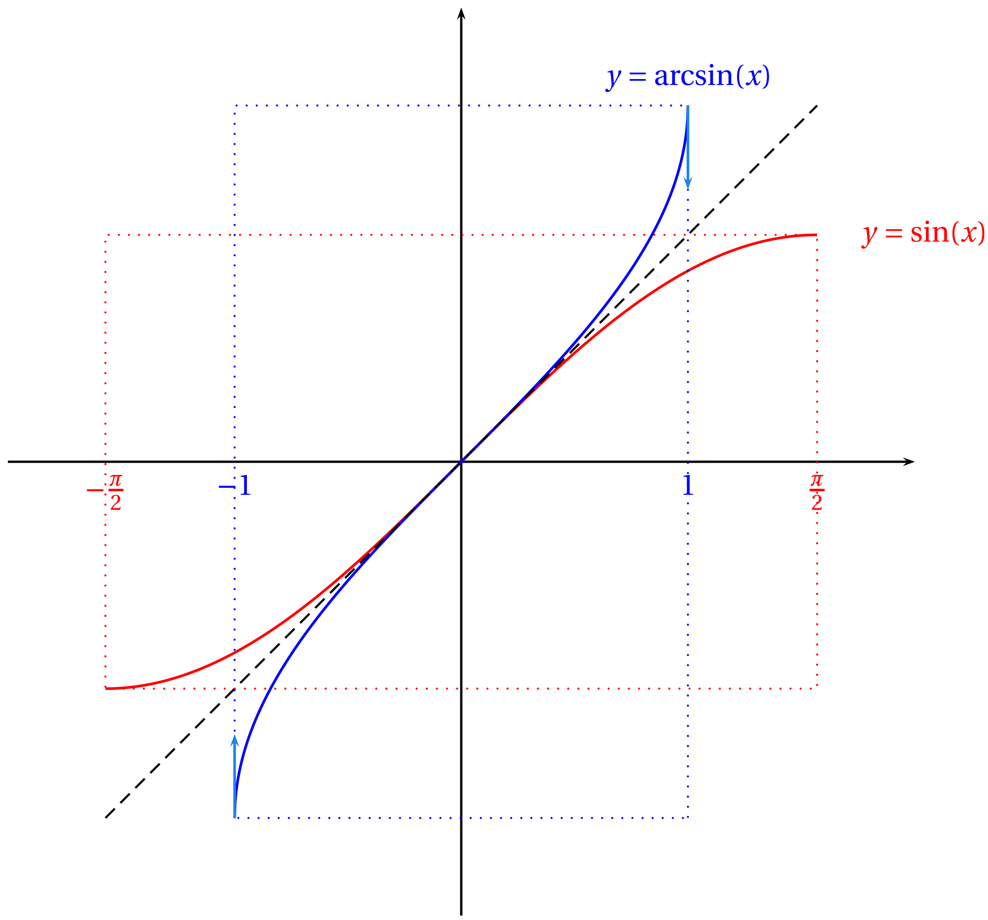
2.7.1 Arc sinus

La fonction sin est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Elle induit donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vers l'intervalle image qui est ici $[-1, 1]$.

Sa bijection réciproque est appelée fonction *arc sinus*, notée $\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Elle est définie par :

$$\begin{cases} x = \arcsin(y) \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y \in [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(x) = y \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y \in [-1, 1] \end{cases}$$



Proposition 40 – Propriétés de la fonction arc sinus

1. arcsin est impaire : $\forall y \in [-1,1],\ \arcsin(-y) = -\arcsin(y)$
2. arcsin est continue et strictement croissante sur $[-1,1]$.
3. $\forall y \in [-1,1],\ \sin(\arcsin(y)) = y$ et $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \arcsin(\sin(x)) = x$
4. On a les valeurs remarquables :

y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin(y)$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$

5. arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\forall y \in]-1,1[, \quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

En -1 et 1, arcsin n'est pas dérivable et sa courbe représentative admet des demi-tangentes verticales en ces points.

⚠ Attention à ne pas simplifier abusivement : $\arcsin\big(\sin(x)\big)$ qui est défini sur $\mathbb{R}$.
$\arcsin(\sin(x)) = x$ si, et seulement si, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2.7.2 Arc cosinus

La fonction cos est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Elle induit donc une bijection de $[0,\pi]$ vers l'intervalle image qui est ici $[-1,1]$.

Sa bijection réciproque est appelée fonction *arc cosinus*, notée $\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$.

Elle est définie par :

$$\begin{cases} x = \arccos(y) \\ x \in [0,\pi] \\ y \in [-1,1] \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(x) = y \\ x \in [0,\pi] \\ y \in [-1,1] \end{cases}$$

Proposition 41 – Propriétés de la fonction arc cosinus

1. arccos est continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$.
2. $\forall y \in [-1,1]$, $\cos(\arccos(y)) = y$ et $\forall x \in [0,\pi]$, $\arccos(\cos(x)) = x$
3. On a les valeurs remarquables :

y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos(y)$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0

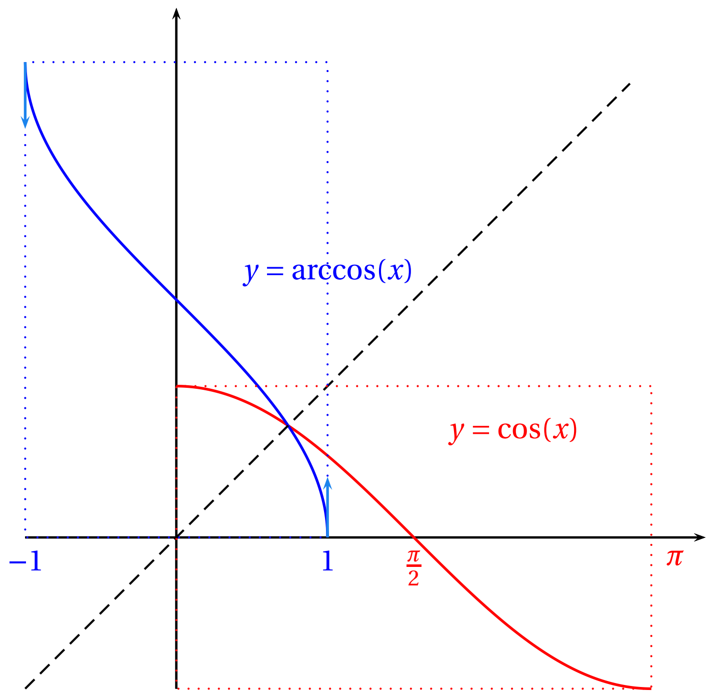
4. arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\forall y \in]-1,1[, \quad \arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

La fonction arccos n'est ni paire ni impaire.

En -1 et 1, arccos n'est pas dérivable et sa courbe représentative admet des demi-tangentes verticales en ces points.

⚠ Attention à ne pas simplifier abusivement : $\arccos\big(\cos(x)\big)$ qui est défini sur $\mathbb{R}$.
$\arccos(\cos(x)) = x$ si, et seulement si, $x \in [0,\pi]$.



Remarque : La fonction $x \longmapsto \arcsin(x) + \arccos(x)$ est dérivable sur $]-1,1[$ et sa dérivée est nulle : cette fonction est donc constante sur cet intervalle. La valeur de cette constante est $\frac{\pi}{2}$ (valeur en 0). Comme on a aussi :

$$\arcsin(1) + \arccos(1) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \arcsin(-1) + \arccos(-1) = \frac{\pi}{2}$$

on peut conclure :

$$\forall x \in [-1,1], \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

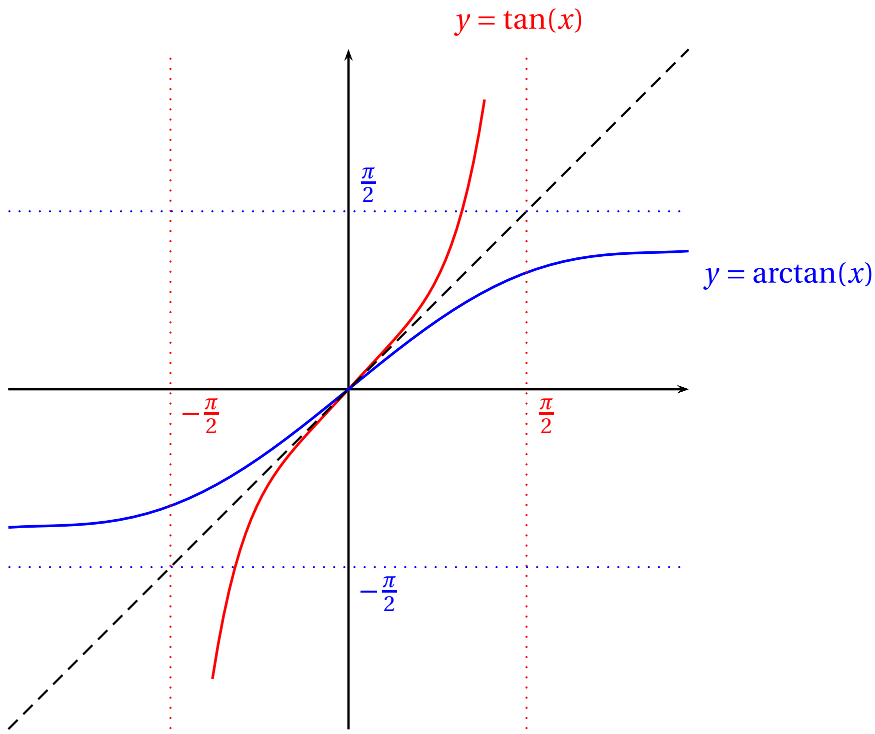
2.7.3 Arc tangente

La fonction tan est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Elle induit donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers l'intervalle image qui est ici $\mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque est appelée fonction *arc tangente*, notée $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Elle est définie par :

$$\begin{cases} x = \arctan(y) \\ y \in \mathbb{R} \\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \iff \begin{cases} \tan(x) = y \\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Proposition 42 – Propriétés de la fonction arc tangente

1. arctan est impaire : $\forall y \in \mathbb{R}$, $\arctan(-y) = -\arctan(y)$
2. arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. $\forall y \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(y)) = y$ et $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan(x)) = x$
4. $\lim\limits_{y \to +\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{y \to -\infty} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2}$
5. On a les valeurs remarquables :

y	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\arctan(y)$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$

6. arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

⚠ Attention à ne pas simplifier abusivement : $\arctan\big(\tan(x)\big)$ qui est défini sur $\mathscr{D}_{\tan}$. $\arctan(\tan(x)) = x$ si, et seulement si, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

3 Compétences à acquérir sur ce chapitre

➥ Savoir réduire l'intervalle d'étude d'une fonction nuémrique en exploitant les propriétés de parité ou de symétrie.

➥ Connaître les opérations sur les fonctions et les formules de dérivation associées.

➥ Savoir exprimer les propriétés de monotonie et d'existence d'extremum à l'aide des quantificateurs.

➥ Faire une étude de signe de la dérivée et en déduire la monotonie et les extremums d'une fonction.

➥ Connaître les fonctions usuelles sin, cos, tan, ln, exp, $x \longmapsto x^\alpha$, sh, ch, arcsin, arccos et arctan.

- ✪ Connaître les limites usuelles obtenues par continuité ou dérivabilité en 0.
- ✪ Connaître les limites dites de « croissances comparées » entre les fonctions puissances, logarithme et exponentielle.

4 Exercices

Généralités sur les fonctions

EXERCICE 1. Involutions de $\mathbb{R}$ croissantes

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application croissante telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = x$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.

EXERCICE 2. Opérations sur les fonctions monotones

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que :

1. Si f et g sont croissantes sur I alors $f + g$ est croissante sur I.
2. Si f est croissante sur I et g croissante sur J, tel que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ croissante sur I.
3. Si f et g sont croissantes positives sur I alors $f \times g$ est croissante sur I.

EXERCICE 3. Fonction périodiques et monotones

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T > 0$. On suppose que f est monotone.
Montrer que f est constante.

Logarithme et exponentielle

EXERCICE 4. Approximations de e

1. Montrer que : $\forall x > -1, \quad \ln(1 + x) \leq x$.
2. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$.

EXERCICE 5. Preuve d'une inégalité par étude de f''

Soit $0 < a \leq b$. On pose $f : x \in \mathbb{R}_*^+ \longmapsto \dfrac{\ln(1 + ax)}{\ln(1 + bx)}$. Etudier la monotonie de f et en déduire que

$$\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2.$$

EXERCICE 6. Propriétés algébriques de ln **et** exp

Pour $x > 0$ simplifier $\left(\exp\left(x^2\right)\right)^{\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}{x}}$.

EXERCICE 7. Puissances

Parmi les relations suivantes lesquelles sont exactes :
1) $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$ 2) $a^b a^c = a^{bc}$ 3) $a^{2b} = \left(a^b\right)^2$
4) $(ab)^c = a^{\frac{c}{2}} b^{\frac{c}{2}}$ 5) $\left(a^b\right)^c = a^{\left(b^c\right)}$ 6) $\left(a^b\right)^c = (a^c)^b$?

Fonctions hyperboliques

EXERCICE 8. Trigonométrie hyperbolique

1. Montrer les formules suivantes, valables pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x; \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}; \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

2. Calculer, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x+y)$, $\operatorname{ch}(x-y)$, $\operatorname{sh}(x+y)$ et $\operatorname{sh}(x-y)$ en fonction de $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{ch} y$ et $\operatorname{sh} y$.
3. En déduire des formules de transformation de sommes en produits de fonctions hyperboliques.

EXERCICE 9. Fonctions hyperboliques réciproques

1. Montrer que la fonction sh est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et déterminer une expression de sa bijection réciproque.
2. Montrer que la fonction ch est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $[1, +\infty[$ et déterminer une expression de sa bijection réciproque.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\operatorname{th}(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$. Montrer que la fonction th est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$ et déterminer une expression de sa bijection réciproque.

EXERCICE 10. Fonctions hyperboliques réciproques

Donner l'ensemble de définition, puis simplifier les expressions suivantes :

$$\operatorname{ch}\left(\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right) \qquad \operatorname{sh}\left(\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right) \qquad \operatorname{ch}\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right) \qquad \operatorname{sh}\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)$$

EXERCICE 11. Calculs de sommes

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.
Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a+kb)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a+kb)$.

Fonctions circulaires réciproques

EXERCICE 12. Composée de cos **et** arccos

Représenter graphiquement les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \cos(\arccos(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \arccos(\cos(x))$$

EXERCICE 13. Quelques formules...

Simplifier les expressions :

$$\begin{array}{ccc} \cos(\arctan(x)) & \sin(\arctan(x)) & \tan(2\arctan(x)) \\ \tan(\arcsin(x)) & \tan(\arccos(x)) & \cos(4\arctan(x)) \end{array}$$

EXERCICE 14. Formule de Machin

Démontrer : $\dfrac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right)$

EXERCICE 15. Obtention d'une formule par dérivation

Simmplifier $\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

EXERCICE 16. Calculs de dérivées

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leur dérivée :

1. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\arcsin(x)}{1+\arcsin(x)}}$
3. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$
4. $f(x) = \arctan\sqrt{\dfrac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}}$.

EXERCICE 17. Un calcul de somme

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\arctan(p+1) - \arctan(p)$.
2. Etudier la convergence et la limite de la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$$

EXERCICE 18. Une simplification

Simplifier l'expression :

$$f(x) = \cos(\arccos x - \arcsin x) - \sin(\arccos x - \arcsin x)$$

Equations et inéquations

EXERCICE 19. Equations et inéquations

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1) $e^{2x+1} = e^{\frac{6}{x}}$

2) $e^{2x-1} > e^{-x^2+3}$

3) $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$

4) $|x^2 + 2x - 3| < 6$

5) $|x^2 + 2x| < 3|x|$

6) $\ln(2x) = \ln(x^2 - 1)$

7) $\ln(2x) \geq \ln(x^2 - 1)$

8) $\sqrt{x+1} \leq 5 - x$

9) $x + \sqrt{x^2+1} > 0$

10) $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$

11) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+6} = 3$

12) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} + \sqrt{x+100} = 12$

13) $2\ln(x+1) + \ln(3x+5) + \ln 2 = \ln(6x+1) + \ln(x-2) + \ln(x+2)$

14) $e^x + e^{1-x} = e + 1$

15) $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$

16) $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$

EXERCICE 20. Système d'équations

Résoudre les systèmes suivants :

a) $\left\{\begin{array}{l} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} e^x e^{2y} = 1 \\ 2xy = 1 \end{array}\right.$