Chapitre 7

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Sommaire

Dans tout le chapitre la lettre $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les *scalaires*.

1 L'espace $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

1.1 Définitions

On fixe n et p deux entiers naturels non nuls.

Définition 1 – Matrice

On appelle *matrice* à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute application :

$$A : \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i,j) & \longmapsto & A[i,j] \end{array}$$

On dit aussi que A est une matrice de *taille* $n \times p$ ou (n,p).

Définition 2 – Coefficients

Le scalaire $A[i,j]$ est appelé *coefficient* de A sur la ligne i et la colonne j.

Il peut être aussi noté $A_{i,j}$ ou encore $a_{i,j}$. Dans ce cas la matrice A peut être notée $((a_{i,j}))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$.

A peut aussi être représentée sous forme d'un tableau à n lignes et p colonnes :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} \text{colonne } j \\ \downarrow \end{array} \\ A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Notation : L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Remarquer que $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

Vocabulaire :

- Si $n = 1$, on dit que $A \in \mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est une matrice ligne.
- Si $p = 1$, on dit que $A \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est une matrice colonne.
- Si $n = p$, $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est aussi noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée d'ordre n.
- La diagonale de A est la famille de ses éléments diagonaux $(a_{i,i})_{1\leq i\leq \min(n,p)}$.

Définition 3 – Égalité de deux matrices

Soient n, n', p, p' des entiers naturels non nuls, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n',p'}(\mathbb{K})$.
On dit que $A = B$ lorsque $n = n'$, $p = p'$ et :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad A[i,j] = B[i,j]$$

Donc deux matrices sont égales si, et seulement si, elles ont même taille et mêmes coefficients.

Définition 4 – Matrices triangulaires supérieures

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *triangulaire supérieure* lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i > j \Longrightarrow A[i,j] = 0$$

Une matrice triangulaire supérieure est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On définit de même la notion de matrice A triangulaire inférieure :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i < j \Longrightarrow A[i,j] = 0$$

Une matrice *triangulaire inférieure* est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Définition 5 – Matrices diagonales

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *diagonale* lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A[i,j] = 0$$

Une matrice diagonale est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Notations :

- On note $T_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées triangulaires supérieures d'ordre n ;
- On note $T_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées triangulaires inférieures d'ordre n ;
- On note $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées diagonales d'ordre n.

Proposition 6 – Lien entre matrices diagonales et triangulaires

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \text{ est diagonale} \iff A \text{ est à la fois triangulaire supérieure et inférieure}$$

Autrement dit : $D_n(\mathbb{K}) = T_n^+(\mathbb{K}) \cap T_n^-(\mathbb{K})$.

1.2 Opérations dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

On définit l'addition de deux matrices.

Définition 7 – Addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soient $A = ((a_{i,j}))_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = ((b_{i,j}))_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On définit une matrice notée $A+B = ((c_{i,j}))_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

On a donc :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad (A+B)[i,j] = A[i,j] + B[i,j]$$

✎ ***Exemple.*** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3+1 \\ 0+4 & 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

On définit ensuite la multiplication d'une matrice par un scalaire.

Définition 8 – Multiplication par un scalaire d'un élément de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soient $A = ((a_{i,j}))_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On définit une matrice notée $\lambda.A = ((d_{i,j}))_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad d_{i,j} = \lambda \times a_{i,j}$$

On a donc :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad (\lambda.A)[i,j] = \lambda \times A[i,j]$$

✎ ***Exemple.*** $2.\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 3 & 2\times 2 \\ 2\times 0 & 2\times 1 \\ 2\times 1 & 2\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Reste à définir l'élément neutre pour l'addition.

Définition 9 – Matrice nulle

Dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle matrice nulle la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 0 ; elle est notée $0_{n,p}$.

Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $0_{n,n}$ est notée plus simplement 0_n.

✎ ***Exemple.*** $0_{2,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Théorème 10 – Règles de calcul dans l'espace $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Pour saclaire λ et μ et pour toutes matrices A, B et C dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on a :

1. Commutativité et associativité de l'addition :

$$A+B=B+A \quad \text{et} \quad \big(A+B\big)+C=A+\big(B+C\big)$$

2. La matrice nulle est l'« élément neutre » pour l'addition :

$$0_{n,p}+A=A+0_{n,p}=A$$

3. $(-1).A$ est l'« opposée » de A :

$$A+(-1).A=(-1).A+A=0_{n,p}$$

4. Multiplication par un scalaire distributive p/r à l'addition des scalaires/matrices :

$$(\lambda+\mu).A=\lambda.A+\mu.A \quad \text{et} \quad \lambda.\big(A+B\big)=\lambda.A+\lambda.B$$

5. Associativité de la multiplication par un scalaire :

$$\lambda.\big(\mu.A\big)=(\lambda\times\mu).A=\mu.\big(\lambda.A\big)$$

6. Le scalaire 1 est l'« élément neutre » pour la multiplication par un scalaire :

$$1.A=A$$

Dorénavant la matrice $(-1).A$ sera notée plus simplement $-A$, et l'opération $A+(-1).B$ sera notée $A-B$.

Corollaire 11 – Règles de calcul dans l'espace $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Si $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$ et $(A,B)\in\big(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\big)^2$, on a :

1. $\lambda.\big(A-B\big)=\lambda.A-\lambda.B$;
2. $\lambda.0_{n,p}=0_{n,p}$;
3. $(\lambda-\mu).A=\lambda.A-\mu.A$;
4. $0.A=0_{n,p}$;
5. $(-\lambda).\big(-A\big)=\lambda.A$;
6. Intégrité externe : $\lambda.A=0_{n,p} \iff \lambda=0$ ou $A=0_{n,p}$

L'intégrité externe permet de « simplifier » un produit d'une matrice par un scalaire :

$$\lambda.A=\mu.A \iff A=0_{n,p} \text{ ou } \lambda=\mu ;$$
$$\lambda.A=\lambda.B \iff \lambda=0 \text{ ou } A=B.$$

2 Produit matriciel

2.1 Produit d'une matrice par un vecteur colonne

Si $A = ((a_{i,j}))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice dont les colonnes sont notées $C_1, \ldots, C_p$ et si $X = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est une matrice colonne, on définit le produit $A\times X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ par :

$$A\times X = x_1.C_1 + x_2.C_2 + \cdots + x_p.C_p = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{p} a_{1,k}\times x_k\\ \vdots\\ \sum\limits_{k=1}^{p} a_{i,k}\times x_k\\ \vdots\\ \sum\limits_{k=1}^{p} a_{n,k}\times x_k\end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow\quad \text{ligne } i\\ \\ \\ \end{matrix}$$

ie que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$(AX)[i,1] = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\times x_k$$

$A\times X$ est donc une *combinaison linéaire* des colonnes de A, dont les coefficients sont ceux de X.

✎ ***Exemple.*** $\begin{pmatrix} 1 & 2\\ -1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1+2\times 2\\ (-1)\times 1+(-1)\times 2\\ 1\times 1+0\times 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ -3\\ 1\end{pmatrix}$.

2.2 Cas général : produit de deux matrices

Soient n, p et q des entiers naturels non nuls.

On définit le produit de $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ ainsi :
• on note $X_1, \ldots, X_q$ les matrices colonnes égales aux colonnes de B,
• la matrice $A\times B \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ est la matrice dont les colonnes sont les matrices $A\times X_1, \ldots, A\times X_q$.

⚠ Nous ne définissons donc le produit $A\times B$ que dans le cas où le nombre de **colonnes** de A est égal au nombre de **lignes** de B.
Dans les autres cas le produit $A\times B$ n'est pas défini.

Théorème 12 – Formule du produit matriciel

Soient $A = ((a_{i,j}))_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = ((b_{i,j}))_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On note $A\times B = ((c_{i,j}))_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq q}} \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.
On a alors :

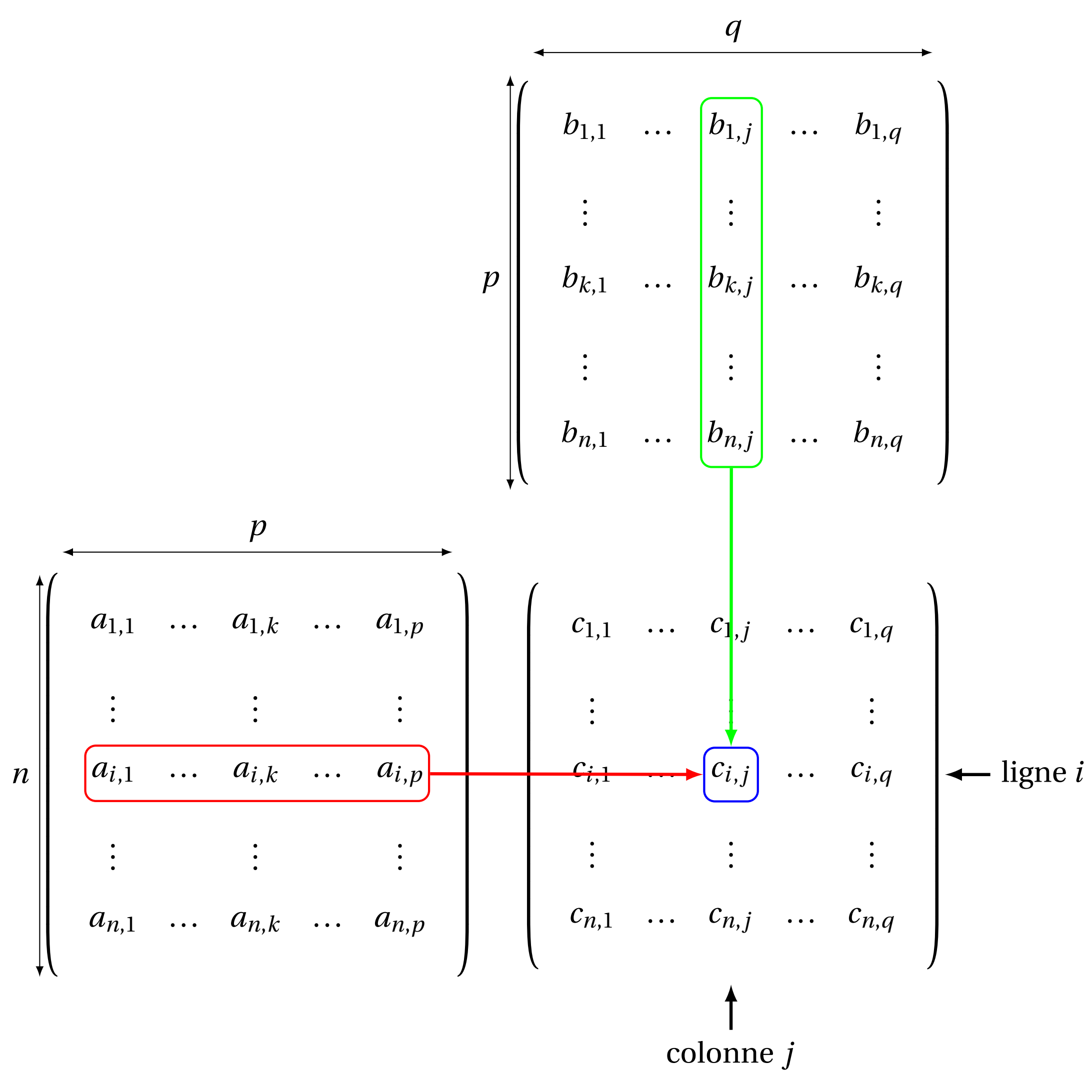
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!],\quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\times b_{k,j}$$

Avec d'autres notations :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!],\quad (A\times B)[i,j] = \sum_{k=1}^{p} A[i,k]\times B[k,j]$$

Comment poser le produit matriciel ?

Le coefficient $c_{i,j}$ situé ligne i et colonne j se calcule en suivant la ligne i de la matrice A et la colonne j de la matrice B. Une disposition astucieuse des matrices permet de « visualiser » ce calcul.



⚠ Le produit matriciel ne se fait donc pas coefficient par coefficient (contrairement à l'addition) : $(A\times B)[i,j] \neq A[i,j]\times B[i,j]$.

✎ ***Exemple.*** Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a $AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

⚠ Même si les deux produits AB et BA existent (ce qui est rarement le cas), on voit que $AB \neq BA$ en général. Le produit matriciel *n'est donc pas commutatif.*

✎ ***Exemple.*** Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_2$ on a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$.

⚠ Si $AB = 0_{n,q}$, on ne peut pas dire que $A = 0_{n,p}$ ou $B = 0_{p,q}$. Le produit matriciel *n'est pas intègre*. Un autre façon de le dire est qu'il existe des diviseurs de $0_{n,q}$ qui sont non triviaux.
Plus généralement l'égalité $AB = AC$ ne donne donc pas $B = C$, même si $A \neq 0_{n,p}$.

Proposition 13 – Lignes de la matrice $A\times B$

On note $L_1, \dots, L_n$ les matrices lignes égales aux lignes de A. Alors la i-ième ligne de la matrice $A\times B$ est égale à $L_i \times B$.

2.3 Règles de calcul pour le produit matriciel

Définition 14 – Matrice identité

On note I_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la diagonale qui sont égaux à 1.

On a donc :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Avec d'autres notations : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ I_n[i,j] = \delta_{i,j}$.

Théorème 15 – Règles de calcul pour le produit matriciel

1. Associativité. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$:
$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$
2. Distributivité à droite. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(B, C) \in \left(\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})\right)^2$:
$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$
3. Distributivité à gauche. Si $(A, B) \in \left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right)^2$ et $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$:
$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$
4. Compatibilité entre produit matriciel et produit par un scalaire.
Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:
$$\lambda.(A \times B) = (\lambda.A) \times B = A \times (\lambda.B)$$
5. Élément neutre à gauche/droite. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:
$$A \times I_p = I_n \times A = A$$
6. Matrice nulle. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:
$$A \times 0_{p,q} = 0_{n,q} \quad \text{et} \quad 0_{m,n} \times A = 0_{m,p}$$

⚠ Rappelons une dernière dois que le produit matriciel est *non commutatif et non intègre* (sauf si $n = 1$ car $\mathscr{M}_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$).

2.4 Cas des matrices carrées

Dans le cas de matrices carrées d'ordre n, les trois opérations définies précédemment donnent une matrice carrée de même taille. Dans une certaine mesure, elles sont donc plus simples, puisqu'on reste dans le même espace.

Si A est dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on a :
$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \qquad A \times I_n = I_n \times A = A \quad \text{et} \quad A \times 0_n = 0_n \times A = 0_n$$

On peut donc remarquer que la matrice I_n *commute avec toutes les matrices* de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Plus généralement, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $\lambda.I_n$ commute aussi avec toutes les matrices car $(\lambda.I_n)A = A(\lambda.I_n) = \lambda.A$

Définition 16 – Puissances d'une matrice carrée

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}$ on définit A^p par récurrence : $A^0 = I_n$ et $A^p = A \times A^{p-1}$.

Si $p \in \mathbb{N}^*$, on a donc $A^p = \underbrace{A \times A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}}$. On remarque que $I_n^p = I_n$ et $0_n^p = 0_n$.

⚠ Bien évidemment, on ne peut pas dire que $\left(A^p\right)[i,j] = \left(A[i,j]\right)^p$.
Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 \\ (-1)^2 & 0^2 \end{pmatrix}$$

Proposition 17 – Règles de calculs des puissances

Soient $(A, B) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$ et $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

1. $\left(A^p\right)^q = \left(A^q\right)^p = A^{pq}$
2. $A^p \times A^q = A^q \times A^p = A^{p+q}$
3. Si A et B commutent : $(AB)^p = A^p B^p$
4. Si λ est un scalaire : $(\lambda.A)^p = \lambda^p.A^p$

En général $(AB)^p = \underbrace{AB \times AB \times \cdots \times AB}_{p \text{ fois}}$.

Théorème 18 – Cas des matrices triangulaires supérieures

Si A et B sont triangulaires supérieures d'ordre n, alors AB l'est aussi et sa diagonale est obtenue en multipliant la diagonale de A avec la diagonale de B.

On dit que $T_n^+(\mathbb{K})$ est stable pour le produit matriciel.

On peut le visualiser ainsi :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ 0 & \lambda_2 & \star & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ 0 & \mu_2 & \star & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & & \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \star & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

On a le même résultat avec des *matrices triangulaires inférieures*.

Corollaire 19 – Cas des matrices diagonales

Si A et B sont diagonales d'ordre n, alors AB l'est aussi et sa diagonale est obtenue en multipliant la diagonale de A avec la diagonale de B.

On en déduit que *deux matrices diagonales commutent.*

⚠ En général, une matrice diagonale ne commute pas avec une matrice quelconque.

On peut le visualiser ainsi :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\mu_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \mu_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \mu_n\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\lambda_1\mu_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\mu_n\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\mu_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \mu_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \mu_n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

On sait donc calculer très facilement les puissances d'une matrice diagonales. Il suffit d'élever sa diagonale à la même puissance :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix}\lambda_1^p & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2^p & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^p\end{pmatrix}$$

De même que pour les nombres réels ou complexes, on peut établir une formule du binôme.

Théorème 20 – Formule du binôme de Newton, version matrice

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n telles que $AB = BA$:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} . A^k \times B^{p-k} = (B+A)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} . B^k \times A^{p-k}$$

Si A et B commutent, on a donc : $(A-B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} . A^k \times B^{p-k}$.

⚠ Ce résultat est faux si $AB \neq BA$.
Par exemple, on a : $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2.AB + B^2$.

✎ ***Exemple.*** On pose $M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Calculer M^n pour tout entier naturel n.

Généralisation des sommes géométriques. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on ne sait pas calculer $\sum\limits_{k=0}^{p} A^k$ mais par on a tout de même l'identité :

$$(I_n - A) \times \left(\sum_{k=0}^{p} A^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{p} A^k\right) \times (I_n - A) = I_n - A^{p+1}$$

⚠ Ne pas confondre avec la formule du binôme.

2.5 Matrices carrées inversibles

Définition 21 – Matrice inversible

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *inversible* lorsqu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n$$

Si on a seulement $AB = I_n$ on dit que A est *inversible à droite*; de même si $BA = I_n$ on dit qu'elle est *inversible à gauche*.

Proposition 22 – Unicité de l'inverse

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.
Il y a unicité de la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

Définition 23 – Inverse d'une matrice inversible

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.
On appelle *inverse* de A l'unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
On la note A^{-1}.

⚠ A^{-1} n'existe pas toujours. De plus, il ne faut pas la noter $\dfrac{1}{A}$.

✎ ***Exemple.*** I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.

✎ ***Exemple.*** 0_n est non inversible.

✎ ***Exemple.*** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

✎ ***Exemple.*** $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $N^2 = 0_2$ et n'est donc pas inversible.
Plus généralement on dit qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *nilpotente* lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0_n$; une telle matrice n'est pas inversible.

✎ ***Exemple.*** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2+2A-3I_n = 0_n$. Montrer que A est inversible et donner A^{-1} en fonction de A.

Notation : On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre n.
$GL_n(\mathbb{K})$ est appelé *groupe linéaire d'ordre n sur* $\mathbb{K}$.

Théorème 24 – Règles de calcul de l'inverse

Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
2. AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\lambda.A$ est inversible et $(\lambda.A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}.A^{-1}$
4. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est inversible et $\left(A^p\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^p$

⚠ En général la matrice $A+B$ n'est plus inversible. Considérer par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = -A$.

Important. L'inversibilité permet de « simplifier » des équations, même en l'absence d'intégrité du produit matriciel :

$$AB = 0_n \not\Rightarrow A = 0_n \text{ ou } B = 0_n$$

mais :

$$AB = 0_n \text{ et } A \text{ inversible } \Longrightarrow B = 0_n$$

et de même :

$$AB = AC \text{ et } A \text{ inversible } \Longrightarrow B = C$$

et on a bien sûr les mêmes propriétés lorsque A est inversible à droite.

✎ ***Exemple.*** Si la matrice $I_n - A$ est inversible alors

$$\sum_{k=0}^{p} A^k = (I_n - A)^{-1} \times (I_n - A^{p+1}) = (I_n - A^{p+1}) \times (I_n - A)^{-1}$$

Définition 25 – Puissances négatives d'une matrice inversible

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.
Pour tout p entier naturel non nul, on pose $A^{-p} = \left(A^{-1}\right)^p = \left(A^p\right)^{-1}$

Si A est inversible, on a donc donné un sens à A^p pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Proposition 26 – Règles de calcul des puissances négatives

Si $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$, on a : $\left(A^n\right)^p = A^{np} = \left(A^p\right)^n$ et $A^n \times A^p = A^{n+p} = A^p \times A^n$ et $\left(A^{-1}\right)^n = A^{-n}$.

On a vu que l'on peut affaiblir la condition d'inversibilité d'une matrice, en ne la définissant qu'à droite ou à gauche. Il se trouve que cela est équivalent au fait d'être inversible, d'après le théorème suivant.

Théorème 27 – Inversibilité à gauche ou à droite d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors on a équivalence de :

(i) A est inversible ;

(ii) A est inversible à gauche ;

(iii) A est inversible à droite.

Autrement dit si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles, $A^{-1} = B$, $B^{-1} = A$ et donc $BA = I_n$.

✎ ***Exemple.*** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2+2A-3I_n = 0_n$. Montrer que A est inversible et donner A^{-1} en fonction de A.

3 Transposition

3.1 Premières propriétés

Définition 28 – Transposée d'une matrice

Soit $A = ((a_{i,j}))_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle transposée de A, la matrice $B = ((b_{i,j}))_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad b_{i,j} = a_{j,i}$$

Cette matrice B est notée ${}^tA$.

Avec d'autres notations, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$:

$$\left({}^tA\right)[i,j] = A[j,i] \quad \text{ou encore} \quad \left({}^tA\right)_{i,j} = A_{j,i}$$

✎ ***Exemple.*** ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Les colonnes deviennent les lignes, et réciproquement.

Théorème 29 – Règles de calcul de la transposée

Soient A et B deux matrices de même taille et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ et ${}^t(\lambda.A) = \lambda.{}^tA$
2. ${}^t\big({}^tA\big) = A$

Soient A et B deux matrices telles que le produit matriciel AB est défini.

3. ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$

Soit A une matrice carrée.

4. A est inversible si, et seulement si, ${}^tA$ l'est. Dans ce cas ${}^t\big(A^{-1}\big) = \big({}^tA\big)^{-1}$.

Si A est une matrice carrée, on a donc : $\forall q \in \mathbb{N}$, ${}^t\big(A^q\big) = \big({}^tA\big)^q$.

Si A est une matrice carrée inversible, on a de plus : $\forall q \in \mathbb{Z}$, ${}^t\big(A^q\big) = \big({}^tA\big)^q$.

3.2 Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 30 – Matrices symétriques/antisymétriques

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On dit que M est symétrique lorsque ${}^tM = M$, ie lorsque :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad M[i,j] = M[j,i]$$
2. On dit que M est antisymétrique lorsque ${}^tM = -M$, ie lorsque :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad M[i,j] = -M[j,i]$$

Si M est antisymétrique, on a : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $M[i,i] = 0$. Donc une matrice antisymétrique a tous ses coefficients diagonaux égaux à 0.

✎ ***Exemple.*** I_n est symétrique. 0_n est la seule matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui est à la fois symétrique et antisymétrique.

✎ ***Exemple.*** Les matrices diagonales sont symétriques.

✎ ***Exemple.*** Une matrice symétrique d'ordre 3 est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ et une matrice antisymétrique d'ordre 3 est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$.

<u>**Notations**</u> **:** on note $S_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n, et $A_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées antisymétriques d'ordre n.

⚠ En général, le produit de deux matrices symétriques n'est plus symétrique.

Considérer par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ qui donnent $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

✎ ***Exemple.*** Soient A et B symétriques et de même taille. Montrer que A et B commutent si, et seulement si, AB est symétrique.

4 Systèmes linéaires

Pour commencer, nous allons voir sur deux exemples pourquoi il est indispensable de résoudre des équations (ou système d'équations) par équivalence.

- On considère l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
  Si on multiplie par x : $x^3 + x^2 + x = 0$. Et comme $x^2 = -x - 1$, on en déduit : $x^3 = 1$, ie $x = 1$ puisque $x \in \mathbb{R}$.
  C'est absurde puisque 1 n'est pas solution de l'équation de départ.
  Explications : on a en fait raisonné par implications et obtenu $x^2+x+1 = 0 \Longrightarrow x = 1$. Mais $x = 1$ serait l'unique solution à condition d'avoir l'équivalence $x^2 + x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$. Or ce n'est pas le cas ici, l'implication $x = 1 \Longrightarrow x^2 + x + 1 = 0$ est fausse.
  On a donc obtenu que l'équation n'a pas de solution.
- On considère le système d'équation : $\begin{cases} x - y &= 1 \quad (1) \\ x + y &= 3 \quad (2) \\ -x + 3y &= -3 \quad (3) \end{cases}$
  (1) + (2) donne $2x = 4$ donc $x = 2$, et (2) + (3) donne $4y = 0$ donc $y = 0$. Le système aurait donc comme unique couple solution $(2, 0)$?
  Encore une fois la réponse est non : ce n'est pas une solution.
  On a donc : $\begin{cases} x - y &= 1 \quad (1) \\ x + y &= 3 \quad (2) \\ -x + 3y &= -3 \quad (3) \end{cases} \Longrightarrow (x, y) = (2, 0)$ mais la réciproque est fausse. En conclusion le système n'a aucune solution.

Que retenir de ces exemples ?
Qu'il faut résoudre des équations en raisonnant par équivalence !
Si ce n'est pas possible, alors il faut garder en tête qu'on ne trouve pas que des solutions mais aussi des « candidats solutions ». Il faut alors vérifier au cas par cas si chaque « candidat solution » est bien une solution.

4.1 Définitions

On se donne deux entiers naturels non nuls n et p, ainsi que np coefficients $(a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ dans $\mathbb{K}$ que nous appellerons *coefficients du système*, et n autres coefficients $b_1, \ldots, b_n$ dans $\mathbb{K}$ qui formeront le *second membre du système*.

On considère alors le *système linéaire de n équations à p inconnues* :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,j}x_j & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,j}x_j & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_1 & + & a_{i,2}x_2 & + & \dots & + & a_{i,j}x_j & + & \dots & + & a_{i,p}x_p & = & b_i \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,j}x_j & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

x_1, x_2, ..., x_p sont appelées *inconnues du système*. *Résoudre le système* (S) consiste à trouver l'ensemble $\mathscr{S}$ de tous les p-uplets $(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{K}^p$ qui sont solutions des équations de $\mathscr{S}$.

On appelle *système homogène associé*, noté (S_0), le système obtenu lorsque $b_1=\cdots=b_n=0$. On note $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions du système homogène. Remarquez qu'on a toujours $(0,0,\dots,0)\in\mathscr{S}_0$, et donc $\mathscr{S}_0\neq\emptyset$.

On dit que le système (S) est *compatible* lorsque $\mathscr{S}\neq\emptyset$, et *incompatible* dans le cas contraire. D'après la remarque précédente, un système homogène est toujours compatible.

La matrice $A=((a_{i,j}))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ est appelée *matrice des coefficients* et la matrice colonne $B=((b_{i,1}))_{1\leq i\leq n}$ est appelée *matrice colonne du second membre*.

La concaténation horizontale de ces deux matrices est appelée *matrice augmentée du système*; elle est parfois notée $(A|B)$.

✎ ***Exemple.*** Donner la matrice augmentée du système $(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ x+2y & = & 3\end{array}\right.$

4.2 Opérations élémentaires sur les lignes

Définition 31 – Opérations élémentaires sur les lignes

On note L_1, L_2, ..., L_n les lignes (ie les équations) du système linéaire (S). On définit alors les *opérations élémentaires sur les lignes* :

- échange des lignes i et j : $L_i\longleftrightarrow L_j$
- multiplication de la ligne i par un scalaire $\beta\in\mathbb{K}^*$: $L_i\leftarrow\beta.L_i$
- pour $i\neq j$, remplacement de la ligne i par elle-même additionnée du produit de la ligne j par un scalaire $\alpha\in\mathbb{K}$: $L_i\leftarrow L_i+\alpha.L_j$

Les deux dernières opérations regroupées donnent : $L_i\leftarrow\beta.L_i+\alpha.L_j$ avec $\beta\neq 0$ et $i\neq j$.

Définition 32 – Systèmes équivalents

Deux systèmes linéaires sont dit *équivalents* si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

Théorème 33 – Systèmes équivalents

Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

Ces opérations ont une traduction matricielle.

Définition 34 – Matrices équivalentes en lignes

Deux matrices A et A' de même taille sont dites *équivalentes en ligne* si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.
On le note $A \underset{L}{\sim} A'$.

On peut montrer que la relation $\underset{L}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Théorème 35 – Matrices équivalentes en lignes et sytèmes équivalents

Si on passe d'un système (S) à un autre système (S') par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, alors la matrice augmentée de (S') s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de (S) ; et réciproquement.

4.3 Échelonnement d'une matrice et algorithme de Gauss-Jordan

Définition 36 – Matrice échelonnée par lignes

Une matrice est dite *échelonnée par lignes* si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

i. si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ;

ii. à partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

On obtient un schéma « en escalier ».

✎ ***Exemple.*** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée par lignes, mais $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

Définition 37 – Pivots d'une matrice échelonnée par lignes

Si une matrice est échelonnée par lignes, on appelle *pivot* le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.

En pratique on « matérialise » les pivots.

✎ ***Exemple.*** $\begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{7} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 38 – Matrice échelonnée réduite par lignes

Une matrice échelonnée en lignes est dite *échelonnée réduite par lignes* si elle est nulle, ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

✎ ***Exemple.*** $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée par lignes, sans être échelonnée réduite par lignes.

✎ ***Exemple.*** $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite par lignes.

✎ ***Exemple.*** Les matrice O_n et I_n sont échelonnées réduites par lignes.

L'algorithme du pivot de Gauss-Jordan consiste à répéter des opérations sur les lignes d'une matrice, de façon à la transformer en une matrice échelonnée par ligne, puis en une matrice échelonnée réduite par ligne.

Pour la forme échelonnée par ligne il y plusieurs possibilités. Par contre pour la forme échelonnée *réduite* par ligne, il y a une unique solution pour la matrice finale ; c'est tout l'intérêt de cette notion.

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{21,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{CAS 1}}$ A est la matrice nulle : dans ce cas elle est déjà échelonnée réduite. FIN

$\boxed{\text{CAS 2}}$ Un des coefficients de la matrice n'est pas nul. On note j l'indice de la première colonne non nulle et i un indice de ligne où $a_{i,j} \neq 0$.

On effectue l'opération élémentaire $L_1 \longleftrightarrow L_i$. On obtient :

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{a'_{1,j}} & \dots & a'_{1,p} \\ 0 & \dots & 0 & a'_{2,j} & \dots & a'_{2,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a'_{i,j} & \dots & a'_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a'_{n,j} & \dots & a'_{n,p} \end{pmatrix}$$

avec cette fois $a'_{1,j} \neq 0$.

Le coefficient encadré est utilisé comme « pivot » : on l'utilise pour faire faire apparaître des zéros à la place des coefficients qui se trouve en-dessous de lui, dans la même colonne. Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on effectue les opérations :

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a'_{i,j}}{a'_{1,j}} L_1$$

On a alors :

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{a'_{1,j}} & a'_{1,j+1} & \dots & a'_{1,p} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & A' & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

où A' est matrice comportant une ligne de moins que la matrice A.

$\boxed{\text{CAS 2.1}}$ A' est la matrice nulle. Dans ce cas, A est équivalent par lignes à une matrice échelonnée par ligne. FIN

$\boxed{\text{CAS 2.2}}$ On recommence les opérations décrites ci-dessus sur A''. On obtient :

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{a''_{1,j}} & \dots & a''_{1,\ell-1} & a''_{1,\ell} & a''_{1,\ell+1} & \dots & a''_{1,p} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \boxed{a''_{2,\ell}} & a''_{2,\ell+1} & \dots & a''_{2,p} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & A'' & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

où A'' est une matrice comportant deux lignes de moins que la matrice de départ A.

Etc…

L'algorithme s'arrête toujours car on enlève une ligne à chaque étape.

À la fin de l'algorithme, on a obtenu une matrice B échelonnée par lignes, et telle que $A \underset{L}{\sim} B$.

Théorème 39 – Echelonnement d'une matrice

Pour toute matrice A, il existe une matrice B de même taille qui est échelonnée par lignes et telle que $A \underset{L}{\sim} B$.

⚠ La matrice B n'est pas unique.

✎ ***Exemple.*** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Donner une matrice échelonnée par ligne qui est équivalente à A.

✎ ***Exemple.*** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$. Donner une matrice échelonnée par ligne qui est équivalente à A.

Pour avoir unicité de la matrice échelonnée par ligne qui est équivalent à A, il faut lui imposer d'être échelonnée *réduite* par ligne.

Pour cela il faut continuer avec une seconde partie d'algorithme.

Une fois qu'on a obtenu une matrice échelonnée, on divise chaque ligne non nulle par son pivot, ce qui a pour effet de mettre tous les pivots égaux à 1.

Par opérations élémentaires sur les lignes, on peut mettre à 0 tous les coefficients qui se situent au-dessus d'un pivot, sur la même colonne. On obtient ainsi une matrice échelonnée réduite par lignes.

Conformément au programme de PCSI, l'unicité de la matrice obtenue est admise.

Théorème 40 – Echelonnement d'une matrice sous forme réduite

Pour toute matrice A, il existe une *unique* matrice B de même taille qui est échelonnée *réduite* par lignes et telle que $A \underset{L}{\sim} B$.

✎ ***Exemple.*** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Donner *la* matrice échelonnée par lignes qui est équivalente à A.

✎ ***Exemple.*** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$. Donner *la* matrice échelonnée par lignes qui est équivalente à A.

4.4 Application aux systèmes linéaires

Soit (S) un système linéaire de matrice des coefficients $A = ((a_{i,j}))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ et de matrice colonne du second membre $B = ((b_{i,1}))_{1\leq i\leq n}$.

On dira que le système linéaire (S) est *échelonnée* lorsque la matrice A est échelonnée par lignes. On dira que (S) est *échelonné réduit* lorsque A est échelonnée réduite par lignes.

L'algorithme de Gauss-Jordan permet donc de trouver un système linéaire (S'), équivalent à (S), et qui est échelonné (et même échelonné réduit, mais nous n'irons pas jusque là en pratique). Pour résoudre (S), il suffit donc de résoudre le système échelonné (S').

Définition 41 – Inconnues principales et paramètres

Soit (S) un système linéaire et A la matrice de ses coefficients.
On considère B l'unique matrice échelonnée réduite par ligne telle que $A \underset{L}{\sim} B$.
Les inconnues qui correspondent à un pivot de B sont appelées *inconnues principales*.
Les autres inconnues sont appelées *paramètres*.

Les paramètres sont aussi appelés *inconnues secondaires*.

Dans un système seulement *échelonné*, les inconnues principales correspondent encore aux pivots. En pratique on les « matérialise » pour les différencier des paramètres.

✎ ***Exemple.*** Donner les inconnues principales et les paramètres du système linéaire
$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

Définition 42 – Rang d'un système

Soit (S) un système linéaire. Son *rang* est défini comme étant le nombre d'inconnues principales ; on le note $\mathrm{rg}(S)$.

Pour déterminer le rang d'un système linéaire, il faut donc le mettre au moins sous forme échelonnée.

Si (S) est un système linéaire de n équations à p inconnues on peut donc dire que $\mathrm{rg}(S) \leq \min(n,p)$.

Définition 43 – Relation entre rang et nombre de paramètres

Si (S) est une système linéaire à p inconnues et de rang r, alors le nombre de paramètres est égal à $p-r$.

On sait résoudre un système linéaire échelonné à p inconnues : les paramètres peuvent prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{K}$, et les inconnues principales ont une alors une valeur fixée par les paramètres. Pour le nombre de solutions, il n'y a donc que trois possiblités :

- aucune solution s'il est incompatible ;
- s'il est compatible et si $\mathrm{rg}(S) = p$ alors il a une unique solution ;
- s'il est compatible et si $\mathrm{rg}(S) < p$ alors il a une infinité de solutions.

Cela se comprend facilement si $p = 2$ ou $p = 3$: les solutions du système correspondent respectivement à l'intersection de droites dans le plan et à l'intersection de plans dans l'espace.

✎ ***Exemple.*** Résoudre le système linéaire $\begin{cases} 3x-y+z=5 \\ 2x+y-z=1 \\ x-y+z=2 \\ 4x+y+z=3 \end{cases}$

✎ ***Exemple.*** Résoudre le système linéaire $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x+3y-z=2 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$

✎ ***Exemple.*** Résoudre le système linéaire $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x-y-z=2 \\ 4x-y-2z=6 \end{cases}$

✎ ***Exemple.*** Résoudre le système linéaire $\begin{cases} x+y+z-t=1 \\ x-y-z+t=2 \\ x-y-z-t=3 \end{cases}$

✎ ***Exemple.*** Résoudre le système linéaire $x+y+z=0$.

Théorème 44 – Structure de l'ensemble des solutions

Si (S) est un système linéaire à p inconnues et $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*)$ est une solution particulière de (S) alors toute solution de (S) s'écrit comme la somme d'une solution du système linéaire homogène associé et de la solution particulière $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*)$.

5 Opérations élémentaires et calcul matriciel

5.1 Matrices élémentaires

Soient i et j deux éléments de $[\![1;n]\!]$. On note $E_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre n, dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ième ligne et j-ième colonne qui est égal à 1 :

$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} & & & \text{colonne } j & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Pour $(k,\ell) \in [\![1;n]\!]^2$, $E_{i,j}[k,\ell] = \delta_{i,k} \times \delta_{j,\ell}$ où $\delta_{a,b}$ est le *symbole de Kronecker* défini par :

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 45 – Matrice de transvection

On appelle *matrice de transvection* toute matrice de la forme $I_n + \lambda.E_{i,j}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et i, j sont deux éléments de $[\![1;n]\!]$ tels que $i \neq j$.

On note souvent $U_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda.E_{i,j}$: les coefficients de la diagonale valent 1, celui de la i-ième ligne et j-ième colonne vaut λ, et tous les autres valent 0.

Proposition 46 – Lien avec les opérations élémentaires

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et i, j sont deux éléments de $[\![1;n]\!]$ tels que $i \neq j$, et si A est une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors la matrice $U_{i,j}(\lambda) \times A$ se déduit de A après l'opération $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$.

Proposition 47 – Inversibilité d'une matrice de transvection

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et i, j sont deux éléments de $[\![1;n]\!]$ tels que $i \neq j$, alors la matrice de transvection $U_{i,j}(\lambda)$ est inversible et son inverse est $U_{i,j}(-\lambda)$.

Définition 48 – Matrice de transposition

On appelle *matrice de tranposition* toute matrice de la forme $I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ où $i,\ j$ sont deux éléments de $[\![1;n]\!]$ tels que $i \neq j$.

On note souvent $T_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$: les coefficients diagonaux valent 1, sauf le i-ième et le j-ième qui valent 0 ; le coefficient la i-ième ligne et j-ième colonne vaut 1, ainsi que celui de la j-ième ligne et i-ième colonne ; les autres valent 0.

Proposition 49 – Lien avec les opérations élémentaires

Si $i,\ j$ sont deux éléments de $[\![1;n]\!]$ tels que $i \neq j$, et si A est une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors la matrice $T_{i,j} \times A$ se déduit de A après l'opération $L_i \longleftrightarrow L_j$.

Proposition 50 – Inversibilité d'une matrice de transposition

Si $i,\ j$ sont deux éléments de $[\![1;n]\!]$ tels que $i \neq j$, alors la matrice de transposition $T_{i,j}$ est inversible et son inverse elle-même.

Définition 51 – Matrice de dilatation

On appelle *matrice de dilatation* toute matrice de la forme $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$, et $i \in [\![1;n]\!]$.

On note souvent $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$: c'est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux valent 1, sauf le i-ième qui vaut λ.

Proposition 52 – Lien avec les opérations élémentaires

Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et i est un élément de $[\![1;n]\!]$, et si A est une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors la matrice $D_i(\lambda) \times A$ se déduit de A après l'opération $L_i \longleftarrow \lambda L_i$.

Proposition 53 – Inversibilité d'une matrice de dilatation

Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $i \in [\![1;n]\!]$, alors la matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ est inversible et son inverse est $D_i(1/\lambda)$.

L'algorithme de Gauss-Jordan peut lui aussi se traduire matriciellemnt.

Théorème 54 – Décomposition ER d'une matrice

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors il existe une matrice E produit de matrices élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite R telles que $A = ER$.

La matrice E est *inversible*. La matrice R est équivalente par ligne à A : $A \underset{L}{\sim} R$.

⚠ La matrice E n'est pas unique. Prendre par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut définir de même les opérations élémentaires sur les colonnes $C_1, \dots, C_n$ d'une matrice A à n colonnes :

- l'opération $C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j$ se traduit par l'opération $A \times U_{i,j}(\lambda)$;
- l'opération $C_i \longleftrightarrow C_j$ se traduit par l'opération $A \times T_{i,j}$;
- l'opération $C_i \longleftarrow \lambda C_i$ se traduit par l'opération $A \times D_i(\lambda)$.

Si A' est obtenue après des opérations élémentaires sur les colonnes de A, alors on dit que A et A' sont *équivalentes par colonnes* et on le note $A \underset{C}{\sim} A'$. On repasse à des matrices équivalentes par lignes grâce à la transposée :

$$A \underset{C}{\sim} A' \Longleftrightarrow {}^tA \underset{L}{\sim} {}^tA'$$

5.2 Compléments sur les matrices carrées inversibles

Les matrices permettent de simplifier les notations des matrices linéaires.

On se donne (S) un système linéaire de n équations à p inconnues, de matrice des coefficients notée $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de matrice colonne du second membre notée $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et de matrice colonne des inconnues notée $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Proposition 55 – Écriture matricielle d'un système linéaire

$$(x_1, \dots, x_p) \text{ est solution de } (S) \Longleftrightarrow X \text{ est solution de } A \times X = B$$

✎ ***Exemple.*** Le système $\begin{cases} x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \\ 3x + y &= 4 \end{cases}$ s'écrit matriciellement $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On généralise la notion de rang aux matrices.

Définition 56 – Rang d'une matrice

Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on appelle *rang* de A le rang du système linéaire $AX = B$. On le note $\mathrm{rg}(A)$.

Si R est l'unique matrice échelonnée réduite par ligne équivalente par ligne à A alors $\mathrm{rg}(A) =$ nombre de pivots de $R = \mathrm{rg}(R)$.

Proposition 57 – Rang et matrices équivalentes par ligne

Deux matrices équivalentes par lignes ont même rang.

On a le même résultat avec des matrices équivalentes par colonnes.

On a donc $\mathrm{rg}(A) =$ nombre de pivots de toute matrice échelonnée et équivalente à A.

✎ ***Exemple.*** Le rang d'une matrice diagonale est égale au nombre de coefficients non nuls.

Le résultat fondamental est le suivant.

Théorème 58 – Caractérisation des matrices carrées inversibles

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On a équivalence des propriétés suivantes :

(i) A est inversible ;

(ii) $A \underset{L}{\sim} I_n$ ie que A est un produit de matrices élémentaires ;

(iii) $\mathrm{rg}(A) = n$ ie que le système linéaire $AX = 0_{n,1}$ est de rang n ;

(iv) le système linéaire $AX = 0_{n,1}$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, admet une seule solution, qui est $X = 0_{n,1}$;

(v) pour tout $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système linéaire $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, admet une seule solution ;

(vi) pour tout $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système linéaire $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, admet au moins une solution.

✎ ***Exemple.*** Utiliser ce théorème pour montrer que : si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible à droite, alors elle est inversible.

✎ ***Exemple.*** Montrer que si une ligne ou une colonne de A est nulle alors A n'est pas inversible.

✎ ***Exemple.*** Montrer que si deux colonnes de A ou deux lignes de A sont égales alors A n'est pas inversible.

Corollaire 59 – Inversibilité d'une matrice triangulaire

Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si, tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

✎ ***Exemple.*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible mais $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires non nuls, on a pour une matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$$

Pour une matrice triangulaire supérieure, l'inverse est triangulaire supérieure mais ce n'est pas au programme de PCSI.

5.3 Méthode du système linéaire pour inverser une matrice

Noter que sachant que A est inversible, on sait très simplement résoudre le système linéaire $AX = B$ d'inconnue X : la seule solution est $X = A^{-1}B$.

Cette remarque est à la base d'une nouvelle méthode pour montrer à la fois l'inversibilité d'une matrice et calculer son inverse : c'est la *méthode du système linéaire.*

On se donne deux matrices colonnes X et Y et on résout le système linéaire $AX = Y$. Si on trouve une unique solution, c'est que A est *inversible*, ensuite on calcule cette solution, et comme elle doit être égale à $A^{-1}Y$, on peut donc « lire » les coefficients de A^{-1}.

⚠ Ne pas chercher à trouver A^{-1} en cherchant $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$: c'est un système linéaire à n^2 inconnues, alors que dans la méthode précédente le nombre d'inconnue n'est que de n.

✎ ***Exemple.*** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 10 & -6 & -2 \end{pmatrix}$.

5.4 Méthode du pivot de Gauss-Jordan pour inverser une matrice

Le théorème fondamental précédent donne aussi que A est inversible dès que $A \underset{L}{\sim} I_n$. Cela signifie qu'on peut trouver une matrice B composée de produits de matrices élémentaires telle que : $BA = I_n$. Ceci est remarquable puisqu'en fait $B = A^{-1}$.

On en déduit une seconde méthode pour montrer à la fois l'inversibilité d'une matrice et calculer son inverse : c'est la *méthode du pivot de Gauss-Jordan*, aussi appelée *méthode du miroir.*

On détermine via l'algorithme de Gauss-Jordan la matrice échelonné réduite par lignes qui est équivalente par lignes à A. Si c'est I_n alors A est inversible.

Les opérations élémentaires effectués sur les lignes A sont représentées par une matrice B, qui est donc un produit de matrices élémentaires. Si on effectue ces mêmes opérations sur la matrice I_n, on obtient la matrice A^{-1} : en effet, $BI_n = B = A^{-1}$.

En pratique, on ne fait pas deux étapes pour l'algorithme de Gauss-Jordan, mais une seule : pour chaque pivot on annule les coefficients qui sont en-dessous sur la même colonne, mais aussi ceux quis sont au-dessus.

✎ ***Exemple.*** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 10 & -6 & -2 \end{pmatrix}$.

6 Compétences à acquérir sur ce chapitre

- ➥ Connaître le vocabulaire relatif aux matrices.
  - ✪ Connaître les notions de taille pour une matrice quelconque, et d'ordre pour une matrice carrée.
  - ✪ Différencier matrices carrées, matrices triangulaires, matrices diagonales.

- ➥ Maîtriser le calcul matriciel par rapport à l'addition et la multiplication par un scalaire.
  - ✪ Connaître les propriétés de 0_n et I_n.

- ➥ Maîtriser le produit matriciel.
  - ✪ Connaître la définition théorique et l'algorithme de calcul.
  - ✪ Connaître ses propriétés vis à vis des deux autres opérations.
  - ✪ Savoir qu'il n'est pas commutatif et qu'il existe des diviseurs de zéro non triviaux.
  - ✪ Utiliser la formule du binôme.

- ➥ Maîtriser la transposition.
  - ✪ Connaître ses propriétés vis à vis des trois opérations de calculs.
  - ✪ Connaître les définitions des matrices symétriques et antisymétriques.

- ➥ Connaître l'algorithme de Gauss-Jordan.
  - ✪ L'utiliser sur un système linéaire pour déterminer son rang, différencier les inconnues principales des paramètres, et le résoudre.
  - ✪ L'utiliser sur une matrice pour déterminer son rang, et trouver l'unique matrice échelonnée réduite par ligne qui lui est équvalente.

- ➥ Maîtriser la notion de matrice inversible.
  - ✪ Prouver l'inversibilité et déterminer l'inverse par produit matriciel.
  - ✪ Prouver l'inversibilité et déterminer l'inverse grâce à l'algorithme de Gauss-Jordan (méthodes du système linéaire ou du miroir).
  - ✪ Utiliser les matrices inverses pour simplifier des équations.
  - ✪ Caractériser l'inversibilité par fait que le rang est maximal, ou que la matrice s'exprime comme un produit de matrices élémentaires, ou que les sytèmes linéaires associés ont une unique solution.

7 Exercices

Produit matriciel

EXERCICE 1. Calculs de produits de matrices

Calculer les produits de matrices suivants :

1. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$

EXERCICE 2. Calcul de puissances par conjecture

Déterminer A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 3. Calcul de puissances par récurrence

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$. En déduire l'expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 4. Calcul de puissances avec un polynôme annulateur

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner une relation entre A^3, A^2 et A.
2. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = a_n A + b_n A^2$. En déduire l'expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 5. Calcul de puissances avec la formule du binôme matricielle

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A + N$. Vérifier que $AN = NA$ et $N^3 = 0$, puis calculer B^n pour tout $n \geq 3$.
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^n puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 6. Calcul de puissances par diagonalisation

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer PQ et en déduire que P est inversible.
2. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D puis D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Matrices inversibles

EXERCICE 7. Calculs d'inverses

Inverser les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

EXERCICE 8. Polynôme annulateur et inversibilité

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.
Vérifer que $A^2 - A - 2I_2 = 0_2$, puis en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

EXERCICE 9. Inverse d'une matrice 2×2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Vérifier que $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = 0_2$.
Á quelle condition A est-elle inversible ? Déterminer alors A^{-1}.

EXERCICE 10. Puissances négatives

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - I_3)(A + 2I_3)$. En déduire l'existence et le calcul de A^{-1}.
2. Soient $B = \frac{1}{3}(I_3 - A)$ et $C = \frac{1}{3}(A + 2I_3)$. Déterminer B^n et C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire l'expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Cette expression est-elle valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

Algorithme de Gauss-Jordan

EXERCICE 11. Systèmes linéaires

Déterminer le rang puis résoudre les systèmes linéaires d'inconnues réelles suivants (on précisera les inconnues principales et les paramètres) :

1) $\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 4x - y - z = 3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ x - y - z + t = 2 \\ x - y - z - t = 3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases}$

EXERCICE 12. Rang d'une matrice

Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée réduite et déterminer leur rang :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 9 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices d'ordre n

EXERCICE 13. Trace d'une matrice

Soit $A = ((a_{ij}))_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle <u>trace de A</u>, notée $\mathrm{Tr}(A)$, la somme de ses coefficients diagonaux : $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1. Montrer que : $\forall (A,B,\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \times \mathbb{K}$, $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$ et $\mathrm{Tr}(\lambda.A) = \lambda \times \mathrm{Tr}(A)$.
2. Montrer que : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$
   En déduire que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in Gl_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$.
3. Peut-on trouver deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB - BA = I_n$?

EXERCICE 14. Inverse d'une matrice d'ordre n

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & (-1) \\ & & \ddots & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et donner A^{-1}.

EXERCICE 15. Matrices à diagonale strictement dominante

Soit $A = ((a_{i,j}))_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$

Montrer que A est inversible.

EXERCICE 16. Un calcul abstrait

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $I_n + A$ soit inversible. On pose $B = (I_n - A) \times (I_n + A)^{-1}$.

1. Montrer que $B = (I_n + A)^{-1} \times (I_n - A)$.
2. Montrer que $I_n + B$ est inversible et exprimer A en fonction de B.

EXERCICE 17. Résultats théoriques

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer que, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors :

   A et M commutent si et seulement si M est diagonale

2. Montrer que les seules matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres sont les matrices scalaires, c'est-à-dire les matrices de la forme λI_n, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.