TD 1 Ex 14

1. On suppose $g \circ f$ injective. <u>but</u> f injective

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tq $f(x_1) = f(x_2)$. <u>but</u> $x_1 = x_2$.

On a $f(x_1) = f(x_2)$ donc $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

Comme $g \circ f$ injective : $x_1 = x_2$.

Donc f est injective.

Ainsi : $g \circ f$ injective $\Longrightarrow$ f injective.

2. On suppose $g \circ f$ surjective. <u>but</u> g surjective.

Soit $z \in G$. <u>but</u> trouver $y \in F$ tq $z = g(y)$

Comme $g \circ f$ est surjective de E vers G et $z \in G$,

il existe $x \in E$ tq $z = g(f(x))$.

On pose alors $y = f(x)$.

On a bien $y \in F$ et $g(y) = g(f(x)) = z$.

Donc g est surjective.

Ainsi : $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow$ g surjective.

3. On suppose que $g \circ f$ est injective et f est surjective.

<u>but</u> g est injective.

Soit $(y_1, y_2) \in F^2$ tq $g(y_1) = g(y_2)$. <u>but</u> $y_1 = y_2$

Comme f est surjective de E vers F, il existe $x_1 \in E$

tel que $y_1 = f(x_1)$ et il existe $x_2 \in E$ tq $y_2 = f(x_2)$.

Alors $g(y_1) = g(y_2)$ donne $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.

Comme $g \circ f$ est injective : $x_1 = x_2$.

Donc : $f(x_1) = f(x_2)$ ie $y_1 = y_2$.

Ceci prouve que g est injective.

Ainsi : ($g \circ f$ est injective et f est surjective) $\Longrightarrow$ g est injective.

<u>Autre méthode avec la notion de bijection réciproque</u> :

On suppose que $g \circ f$ est injective et que f est surjective.

D'après 1. f est aussi injective.

Donc f est bijective et admet une bijection réciproque f^{-1}.

On remarque que $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$ puisque $f \circ f^{-1} = id_F$.

Comme $g \circ f$ et f^{-1} sont injectives on en déduit que

g est injective.

<u>4.</u> On suppose que $g \circ f$ est surjective et que g est injective.

<u>but</u> f est surjective.

Soit $y \in F$. <u>but</u> Trouver $x \in E$ tq $y = f(x)$.

Comme $y \in F$ alors $g(y) \in G$.

Comme $g \circ f$ est surjective de E vers G, il existe

$x \in E$ tq $g(y) = g(f(x))$.

Comme g est injective on a $y = f(x)$ avec $x \in E$.

Ceci prouve que f est surjective.

Ainsi ($g \circ f$ surjective et g injective) $\Longrightarrow$ f surjective.

Autre méthode avec la notion de bijection réciproque

On suppose que $g \circ f$ est surjective et que g est injective.

D'après 2. g est aussi surjective donc bijective.

Alors g^{-1} existe et $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$.

Donc f est surjective comme composée de surjections.