Théorème de Cantor-Bernstein

1.(a) • On a :

$$\forall i \in I, \bigcap_{j\in I} A_j \subseteq A_i \quad \text{donc} \quad f\left(\bigcap_{j\in I} A_j\right) \subseteq f(A_i)$$

Comme ceci est vrai pour tout $i \in I$ donc :

$$f\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

• Réciproquement, soit $y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

Alors $\forall i \in I, \; y \in f(A_i)$

donc $\forall i \in I, \; \exists x_i \in A_i \, ; \; y = f(x_i)$

Mais f est supposé injective donc tous les x_i, pour $i \in I$, sont égaux. On appelle x cette valeur commune.

Alors $y = f(x)$ avec $\forall i \in I, \; x \in A_i$

ie $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$

donc $y \in f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$

Par double inclusion : $\boxed{f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)}$

1. (b) • Pour tout $i \in I$, $B_i \subseteq \bigcup_{j \in J} B_j$

donc $g(B_i) \subseteq g\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$

donc $\bigcup_{i \in I} g(B_i) \subseteq g\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$

• Réciproquement. Soit $y \in g\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right)$.

Alors $\exists x \in \bigcup_{i \in I} B_i$, $y = g(x)$

Comme $x \in \bigcup_{i \in I} B_i$ on a $\exists i_0 \in I$, $x \in B_{i_0}$

donc $y \in g(B_{i_0})$. Et donc $y \in \bigcup_{i \in I} g(B_i)$

Par double-inclusion on a $\boxed{g\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} g(B_i)}$

1. (c) ⚠ 1. (a) ne s'applique pas à F car F est définie sur $\mathcal{P}(M)$ et non pas sur M.

$$F\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = M \setminus g\left(N \setminus f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)\right)$$

$$\underset{1.(a)}{=} M \setminus g\left(N \setminus \bigcap_{i \in I} f(A_i)\right)$$

$$\underset{\text{Lois de Morgan}}{=} M \setminus g\left(\bigcup_{i \in I} (N \setminus f(A_i))\right)$$

$$F\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \underset{1.(b)}{=} M \setminus \bigcup_{i\in I} g(N \setminus f(A_i))$$

$$\underset{\text{Lois de Morgan}}{=} \bigcap_{i\in I}\left(M \setminus g(N\setminus f(A_i))\right)$$

Donc $\boxed{F\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} F(A_i)}$

2.(a) Soient A_1, A_2 parties de M telles que $A_1 \subseteq A_2$.

On a donc $f(A_1) \subseteq f(A_2)$

donc $N\setminus f(A_2) \subseteq N \setminus f(A_1)$

donc $g(N\setminus f(A_2)) \subseteq g(N\setminus f(A_1))$

donc $M\setminus g(N\setminus f(A_1)) \subseteq M \setminus g(N\setminus f(A_2))$

ie $F(A_1) \subseteq F(A_2)$.

Donc $\boxed{\text{F est croissante pour l'inclusion}}$

2.(b) Pour $k\in\mathbb{N}$ on note H_k le prédicat "$F^{k+1}(M) \subseteq F^k(M)$"

- On a $F^0 = id$ donc $F^0(M) = M$

  Comme F est à valeurs dans $\mathcal{P}(M)$ on a en particulier $F(M) \subseteq M$. Donc H_0 est vrai.

- Soit $k\in\mathbb{N}$ pour lequel H_k est vrai.

  On a donc $F^{k+1}(M) \subseteq F^k(M)$

D'après 2.(a) on a donc :

$$F(F^{k+1}(M)) \subseteq F(F^k(M))$$

ie $F^{k+2}(M) \subseteq F^{k+1}(M)$

Donc H^{k+1} est vrai.

- Par récurrence : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ F^{k+1}(M) \subseteq F^k(M)}$

3.(a) $\forall k \in \mathbb{N}$, $F^k(M)$ est une partie de M puisque F est à valeurs dans $\mathcal{P}(M)$.

Donc $\boxed{E \text{ est une partie de } M}$

3.(b) • D'après 1.(c) on a $F(E) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F(F^k(M))$

donc $F(E) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F^{k+1}(M)$

Avec 2.(b) on en déduit que $F(E) \subseteq E$.

- On a $E = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F^k(M)$

et après changement d'indice $F(E) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} F^k(M)$

Donc $E = F^0(M) \cap F(E) = M \cap F(E)$

et donc $E \subseteq F(E)$

Par double - inclusion $\boxed{E = F(E)}$

3.(c) Soit $x \in M$ tel que $x \notin E$.

Comme $E = F(E)$ on a donc $x \notin F(E)$ et $x \in M$.

Comme $F(E) = M \setminus g(N \setminus f(E))$

on a donc $x \in g(N \setminus f(E))$

Donc x a un antécédent y par g et cet antécédent est un élément de $N \setminus f(E)$

ie que $y \in N$ mais $y \notin f(E)$.

Comme g est injective, cet antécédent est unique.

Donc $\boxed{x \text{ a un unique antécédent } y_x \text{ par } g \text{ dans } N \text{ et il vérifie } y_x \notin f(E)}$

4. Montrons que φ est injective sur M.

Soit $(x_1, x_2) \in M^2$ tq $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$

Cas 1 $(x_1, x_2) \in E^2$. Alors $f(x_1) = f(x_2)$

et comme f est injective : $x_1 = x_2$

Cas 2 $x_1 \in E$ et $x_2 \notin E$.

Alors $\varphi(x_1) = f(x_1) \in f(E)$ et $\varphi(x_2) = y_{x_2} \notin f(E)$

Comme $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, c'est impossible.

Cas 3 $x_1 \notin E$ et $x_2 \notin E$. De même c'est impossible.

Cas 4 $x_1 \notin E$ et $x_2 \notin E$.

Alors $y_{x_1} = y_{x_2}$

donc $g(y_{x_1}) = g(y_{x_2})$ ie $x_1 = x_2$.

Bilan On a $x_1 = x_2$ dans tous les cas.

Ceci prouve que φ est injective sur M.

- Montrons que φ est surjective de M vers N

Soit $y \in N$ fixé qcq.

Cas 1 $y \in f(E)$.

Alors par définition $\exists x \in E;\ y = f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ x \in E}}{=} \varphi(x)$

Comme $E \subseteq M$ on peut dire que $\exists x \in M;\ y = \varphi(x)$

Cas 2 $y \notin f(E)$.

Alors $y \in N \setminus f(E)$.

On pose alors $x = g(y)$

On a $x \in g(N \setminus f(E)) \underset{\text{par déf de } F}{=} M \setminus F(E)$

Comme $F(E) = E$ on a donc $x \in M \setminus E$.

ie $x \notin E$.

Comme $x = g(y)$ on peut dire d'après la question 3.(c) que $y = y_x$ et donc comme $x \notin E$ on a que $y = \varphi(x)$.

Ainsi $\exists x \in M,\ y = \varphi(x)$.

<u>Bilan</u> Dans tous les cas $\exists x \in M,\ y = \varphi(x)$

Ceci prouve que φ est surjective de M vers N

<u>Conclusion</u> $\boxed{\varphi \text{ est une bijection de } M \text{ vers } N}$