TD 1 Ex 5

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $P(n)$ le prédicat "$n! \geq 2^{n-1}$".

Initialisation Si $n=1$: $n! = 1$ et $2^{n-1} = 1$

donc $n! \geq 2^{n-1}$.

Ainsi $P(1)$ est vrai.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $P(n)$ est vrai.

but Mq $P(n+1)$ est vrai ie $(n+1)! \geq 2^n$.

D'après $P(n)$ on a $n! \geq 2^{n-1}$.

Donc $(n+1) \times n! \geq (n+1) \times 2^{n-1}$ ie $(n+1)! \geq (n+1) 2^{n-1}$

Mais $n \geq 1$ donc $n+1 \geq 2$ donc $(n+1) 2^{n-1} \geq 2 \times 2^{n-1} = 2^n$

Par transitivité : $(n+1)! \geq 2^n$. Donc $P(n+1)$ est vrai.

Cl D'après le principe de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; n! \geq 2^{n-1}$

2. On procède cette fois par récurrence à 2 pas.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ le prédicat "$u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$".

Initialisation à 2 pas.

Pour $n=0$: $u_n = u_0 = 3$

$2^{n+1} + (-1)^n = 2 + 1 = 3$

Pour $n=1$: $u_n = u_1 = 3$

$2^{n+1} + (-1)^n = 4 - 1 = 3$.

Donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vrais.

Hérédité à 2 pas. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vrais. but Mq $P(n+2)$ est vrai

ie $u_{n+2} = 2^{n+3} + (-1)^{n+2}$

On a $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$ d'après l'énoncé.

Donc d'après $P(n)$ et $P(n+1)$ on a :

$$
\begin{aligned}
u_{n+2} &= 2^{n+2} + (-1)^{n+1} + 2 \times \left(2^{n+1} + (-1)^n\right) \\
&= 2^{n+2} + 2^{n+2} + (-1) \times (-1)^n + 2 \times (-1)^n \\
&= 2 \times 2^{n+2} + (-1)^n \\
&= 2^{n+3} + (-1)^{n+2} \quad \text{car } (-1)^2 = 1
\end{aligned}
$$

Donc $P(n+2)$ est vrai.

Ccl D'après le principe de récurrence à deux pas :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{n+1} + (-1)^n.$

3. On procède par récurrence à 3 pas.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ le prédicat
$$\text{"} u_n = -2 \times 3^n + 2^{n+1} + 3n 2^{n-1} \text{"}$$

Initialisation à 3 pas

Pour $n=0$: $u_n = u_0 = 0$
$$-2 \times 3^n + 2^{n+1} + 3n 2^{n-1} = -2 + 2 + 0 = 0$$

Pour $n=1$: $u_n = u_1 = 1$
$$-2 \times 3^n + 2^{n+1} + 3n 2^{n-1} = -6 + 4 + 3 = 1$$

Pour $n=2$: $u_n = u_2 = 2$
$$-2 \times 3^n + 2^{n+1} + 3n 2^{n-1} = -18 + 8 + 12 = 2$$

Donc $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vrais.

Hérédité à 3 pas Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $P(n)$, $P(n+1)$ et $P(n+2)$ sont vrais.
but Mq $P(n+3)$ est vrai ie $u_{n+3} = -2 \times 3^{n+3} + 2^{n+4} + 3(n+3) 2^{n+2}$

On a $u_{n+3} = 7u_{n+2} - 16u_{n+1} + 12u_n$ d'après l'énoncé.
Donc d'après $P(n)$, $P(n+1)$ et $P(n+2)$ on a :
$$u_{n+3} = 7\left(-2 \cdot 3^{n+2} + 2^{n+3} + 3(n+2)2^{n+1}\right)$$
$$-16 \times \left(-2 \cdot 3^{n+1} + 2^{n+2} + 3(n+1)2^n\right)$$
$$+12 \times \left(-2 \cdot 3^n + 2^{n+1} + 3n 2^{n-1}\right)$$

4

$$u_{n+3} = (-14\times 9 + 32\times 2 - 24)3^n + (7\times 4 - 16\times 2 + 12)\times 2^{n+1}$$
$$+3(7\times 4 - 16\times 2 + 12)n2^{n-1} + 42\times 2^{n+1} - 48\times 2^n$$
$$= -54\times 3^n + 8\times 2^{n+1} + 24n2^{n-1} + 36\times 2^n$$
$$= -2\times 3^{n+3} + (16+36)2^n + 24n2^{n-1}$$
$$= -2\times 3^{n+3} + 52\times 2^n + 24n2^{n-1}$$
$$= -2\times 3^{n+3} + 2^{n+4} + 36\times 2^n + 24n2^{n-1}$$
$$= -2\times 3^{n+3} + 2^{n+4} + 3(n+3)2^{n+2}$$

Donc $P(n+3)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence à 3 pas :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -2\times 3^n + 2^{n+1} + 3n2^{n-1}$.