Réciproques du théorème de la bijection monotone

On sait que si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors f est bijective de I vers $J=f(I)$.

Une fonction strictement monotone et bijective de I vers J est en particulier monotone et surjective de I vers J donc continue sur I.

Montrons qu'une fonction continue et bijective de I vers J est strictement monotone sur I

On veut montrer que :

$\forall (x_1, x_2) \in I^2,\quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

ou

$\forall (x_1', x_2') \in I^2,\quad x_1' < x_2' \Longrightarrow f(x_1') > f(x_2')$

Par l'absurde on suppose que :

$\exists (x_1, x_2) \in I^2;\quad x_1 < x_2$ et $f(x_1) \geq f(x_2)$

et $\exists (x_1', x_2') \in I^2;\quad x_1' < x_2'$ et $f(x_1') \leq f(x_2')$

On définit alors une fonction $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$\forall t \in [0,1],\quad \varphi(t) = f((1-t)x_1 + tx_1') - f((1-t)x_2 + tx_2')$

Comme f est continue sur I, les théorèmes généraux se garantissent la continuité de φ sur $[0,1]$. ②

De plus $\varphi(0) = f(x_1) - f(x_2) \geq 0$

$\varphi(1) = f(x'_1) - f(x'_2) \leq 0$.

D'après le TVI : φ s'annule sur $[0,1]$ en un $t_0 \in [0,1]$.

$\varphi(t_0) = 0$ donne $f((1-t_0)x_1 + t_0 x'_1) = f((1-t_0)x_2 + t_0 x'_2)$.

Comme f bijective : $(1-t_0)x_1 + t_0 x'_1 = (1-t_0)x_2 + t_0 x'_2$

Si $t_0 \in]0,1[$: $x_1 < x_2$ et $x'_1 < x'_2$

donne $(1-t_0)x_1 + t_0 x'_1 < (1-t_0)x_2 + t_0 x'_2$

puisque $1-t_0 > 0$ et $t_0 > 0$.

Impossible.

Donc $t_0 = 0$ ou 1 :

donc $f(x_1) = f(x_2)$ ou $f(x'_1) = f(x'_2)$

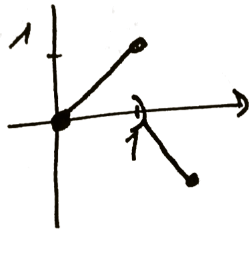
donc $x_1 = x_2$ ou $x'_1 = x'_2$

c'est encore impossible !

f est donc strictement monotone sur I.

⚠ Par contre si f est bijective de I vers J, il est possible qu'elle ne soit ni continue, ni strictement monotone.

Cne-exe $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1-x & \text{si } x \in]1,2] \end{cases}$



f bijective de $[0,2]$ vers $[-1,1]$.