Soit $f : [a,b] \longrightarrow [f(a), f(b)]$ une fonction croissante (1)
et surjective. Mq f est continue sur $[a,b]$.

- Soit $x_0 \in]a,b]$. Montrons que f est continue à gauche en x_0.

On veut montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in [x_0 - \delta, x_0[, |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

On fixe donc $\varepsilon > 0$ quelconque.

On cherche $\delta > 0$ tq

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0[, \quad f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

On pose $y_1 = \max(f(a); f(x_0) - \varepsilon)$ $\left\{ \text{si } \varepsilon \text{ "trop grand" on peut avoir } f(x_0) - \varepsilon < f(a) \right.$

Comme $x_0 \in [a,b]$ on a $f(x_0) \leq f(b)$

donc on est sûr que $y_1 \in [f(a), f(b)]$

Comme f est surjective : $\exists t_1 \in [a,b], \ f(t_1) = y_1$.

* si $t_1 \geq x_0$.

On a $\forall x \in [a, x_0], \quad f(a) \leq f(x) \leq f(x_0)$ car $f \nearrow$

mais $x_0 \leq t_1$ donc $f(x_0) \leq f(t_1) = y_1 \leq f(a)$

donc $f(a) \leq f(x) \leq f(a)$

donc $f(x) = f(a)$

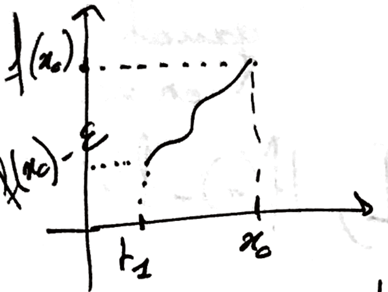
Donc dans ce cas f est constante sur $[a, x_0]$

et donc <u>elle est continue à gauche en x_0.</u>

* si $t_1 < x_0$

Alors $\forall x \in [t_1, x_0[$, $f(t_1) \leq f(x) \leq f(x_0)$ car $f \nearrow$

mais $f(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon$ car $\varepsilon > 0$



et $f(t_1) = y_1 \geq f(x_0) - \varepsilon$

Donc $\forall x \in [t_1, x_0[$, $f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$

Il reste à poser $\delta = x_0 - t_1 > 0$

Alors $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0[$, $f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$

Donc f est continue à gauche en x_0.

On a donc montré que f est continue à gauche en tout point de $]a, b]$.

On peut montrer qu'elle est continue à droite en tout point de $[a, b[$ sans effort. En effet la fonction $g : [-b, -a] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = -f(-x)$ est croissante et surjective de $[-b, -a]$ vers $[g(-b), g(-a)]$ donc continue à gauche en tout point de $]-b, -a]$. On en déduit facilement que f est continue à droite en tout point de $[a, b[$.

Donc f est continue sur $[a, b]$.

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante surjective de $[a,b]$ vers $[f(a), f(b)]$.

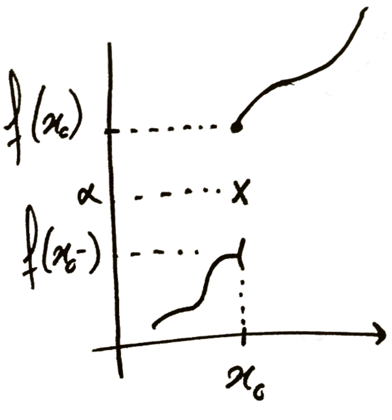
Mq f continue sur $[a,b]$.

Supposons qu'il existe un $x_0 \in [a,b]$ en lequel f est discontinue. Elle est alors discontinue à gauche ou à droite en ce point.

Supposons donc que f n'est pas continue à gauche en $x_0 \in]a,b]$.

Comme f est croissante on sait d'après le théorème de la limite monotone que $f(x_0^-)$ existe et que $f(x_0^-) \leq f(x_0)$.

f discontinue à gauche en x_0 donne donc $f(x_0^-) < f(x_0)$.



On pose $\alpha = \dfrac{f(x_0^-) + f(x_0)}{2}$

Comme $f(x_0^-) < f(x_0)$ on a :

$$\frac{f(x_0^-) + f(x_0^-)}{2} < \alpha < \frac{f(x_0) + f(x_0)}{2}$$

ie $\boxed{f(x_0^-) < \alpha < f(x_0)}$

$x_0 \in [a,b]$ et $f \nearrow$ donne $f(x_0) \leq f(b)$ donc $\alpha \leq f(b)$

D'autre part $\forall y \in [a, x_0[$, $\quad f(a) \leq f(y)$

Si $y \to x_0^-$: $f(a) \leq f(x_0^-)$ et donc $f(a) \leqslant \alpha$

On a donc $\alpha \in [f(a), f(b)]$.

Comme f est surjective de $[a,b]$ vers $[f(a), f(b)]$:

$\exists t \in [a,b],\ f(t) = \alpha$.

Et donc $\boxed{f(x_0^-) < f(t) < f(x_0)}$ avec $t \in [a,b]$.

$f(x_0) > f(t)$ donne $x_0 > t$

par contraposée de : $x_0 \leqslant t \Longrightarrow f(x_0) \leqslant f(t)$

Ainsi $t \in [a, x_0[$ donc $]t, x_0[\neq \emptyset$.

Mais alors $\forall y \in]t, x_0[$ on a $f(t) \leqslant f(y)$

Si $y \to x_0^-$: $\boxed{f(t) \leqslant f(x_0^-)}$

<u>C'est absurde</u> car $f(x_0^-) < f(t)$.

Donc f ne peut pas être discontinue à gauche en x_0. De même on montre qu'elle ne peut pas être discontinue à droite en x_0.

Donc f ne peut pas être discontinue en x_0.

Par l'absurde on a donc montré que f est continue sur $[a,b]$.