1. $x \longmapsto \ln x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Par composition $x \longmapsto |\ln x|$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $x \longmapsto |\ln x|$ est continue sur $]0,1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

De plus $x \longmapsto x^\beta$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (pour tout $\beta \in \mathbb{R}$).

Par composition $x \longmapsto |\ln x|^\beta$ est continue sur $]0,1[$.

De même $x \longmapsto |1-x|^\alpha$ est continue sur $]0,1[$.

Donc f est continue sur $]0,1[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

2. • $\ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$ donc $|\ln x| \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

$$\text{donc } |\ln x|^\beta \xrightarrow[x \to 0^+]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta > 0 \\ 1 & \text{si } \beta = 0 \\ 0 & \text{si } \beta < 0 \end{cases}$$

Comme $x \longmapsto |1-x|^\alpha$ continue en 0 :

$$|1-x|^\alpha \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$$

Par quotients de limites : $$f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta > 0 \\ 1 & \text{si } \beta = 0 \\ 0 & \text{si } \beta < 0 \end{cases}$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0 <u>ssi</u> $\beta \leq 0$

- on sait que $\ln(1+h) \underset{h \to 0}{\sim} h$

donc $\ln x \underset{x \to 1}{\sim} x-1$

donc $|\ln x|^\beta \underset{x \to 1}{\sim} |x-1|^\beta$

Donc $f(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} \dfrac{|x-1|^\beta}{|1-x|^\alpha} \underset{x \to 1^-}{\sim} |x-1|^{\beta-\alpha}$

Donc $f(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} \begin{cases} 0 & \text{si } \beta > \alpha \\ 1 & \text{si } \beta = \alpha \\ +\infty & \text{si } \beta < \alpha \end{cases}$

Donc f se prolonge par continuité en 1 <u>ssi</u> $\beta \geqslant \alpha$

- $\boxed{\text{$f$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$ ssi $0 \geqslant \beta \geqslant \alpha$}}$