1. $\mathcal{D}f = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

D'après les théorèmes généraux, $\boxed{f \text{ est } C^1 \text{ sur }]0,1[\cup]1, +\infty[}$.

On sait que $\ln x = \ln(1 + x - 1) \underset{x \to 1}{\sim} x - 1$

donc $f(x) \underset{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}}{\sim} \dfrac{x+1}{2}$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} f(x) = 1 = f(1)$

Donc f est continue en 1.

Comme elle est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ (car C^1)

elle est donc $\boxed{\text{continue sur } \mathbb{R}_+^*}$.

D'autre part si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \times \frac{\ln x}{2} + \frac{x+1}{x-1} \times \frac{1}{2x} = \frac{-2x \ln(x) + x^2 - 1}{2x(x-1)^2}$$

Pour calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} f'(x)$ on utilise un $DL(1)$.

On pose $x = 1 + h$ avec $h \longrightarrow 0$

$$-2x.\ln(x)+x^2-1=-2(1+h).\ln(1+h)+h^2+2h$$ (2)

$$\underset{h\to 0}{=}-2.(1+h).\left(h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3)\right)+h^2+2h$$

$$\underset{h\to 0}{=}-2h+h^2-\frac{2h^3}{3}-2h^2+h^3+h^2+2h+o(h^3)$$

$$\underset{h\to 0}{=}\frac{h^3}{3}+o(h^3)$$

donc $-2x.\ln(x)+x^2-1\underset{x\to 1}{\sim}\frac{(x-1)^3}{3}$

donc $f'(x)\underset{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}}{\sim}\frac{x-1}{6x}$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}}f'(x)=0}$

Les trois propriétés encadrées permettent d'utiliser le théorème du prolongement du caractère C^1 :

$\boxed{f \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } f'(1)=0}$

2. Sur $\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$, $f'(x)$ est du signe de $-2x.\ln(x)+x^2-1=g(x)$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après les th généraux et :

$\forall x>0,\ g'(x)=-2\ln x-2+2x=-2(\ln x-x+1)$

Avec l'inégalité admise on a : $\forall x>0,\ x\neq 1\Rightarrow g'(x)>0$

Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Or $g(1)=0$

D'où le tableau de signes :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

D'où le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

<u>3.</u> Si $x>1$: $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}\cdot\dfrac{\ln x}{2}$

Avec l'inégalité admise au 2. on a :

$$f(x)<\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{2}=\frac{x+1}{2}\underset{\text{car } 1<x}{<}\frac{2x}{2}=x$$

Donc $\boxed{\forall x>1,\ f(x)<x}$.

<u>4.</u> (a) D'après le tableau de variations de la question 2., l'intervalle $]1,+\infty[$ est <u>stable</u> par f.

D'après le théorème de la suite récurrente il existe une unique suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$x_0 = a > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$.

De plus : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n > 1$.

4. (b) D'après 3. la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Elle est minorée par 1.

D'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers $l \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leq l < a$.

Comme f est continue sur $\mathcal{D}_f$, elle est continue en l.

Donc $f(l) = l$.

D'après 3. et l'inégalité $l \geq 1$ on en déduit que $l = 1$.

Donc $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 1.}$

4. (c) On sait que f est C^1 en 1 donc f' est continue en 1

et $f'(1) = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to 1}\left(|f'(x)| - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} < 0$

Donc au voisinage de 1 on a $|f'(x)| - \frac{1}{3} \leq 0$

Donc $\boxed{\exists \delta > 0, \quad \forall x \in [1-\delta, 1+\delta], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{3}}$

D'après l'inégalité des accroissements finis : comme f est dérivable sur l'intervalle $[1-\delta, 1+\delta]$ on a

$$\forall (t_1, t_2) \in [1-\delta, 1+\delta], \quad |f(t_1) - f(t_2)| \leq \frac{1}{3} |t_1 - t_2|.$$

En particulier avec $t_2 = 1$:

$$\forall t \in [1-\delta, 1+\delta], \quad |f(t) - 1| \leq \frac{1}{3} |t - 1|$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_0, \quad x_n \in [1-\delta, 1+\delta]$

et donc $\boxed{\forall n \geq n_0, \quad |\underbrace{f(x_n)}_{x_{n+1}} - 1| \leq \frac{1}{3} |x_n - 1|}$

4. (d) Par récurrence immédiate :

$$\forall n \geq n_0, \quad |x_n - 1| \leq \frac{1}{3^{n-n_0}} |x_{n_0} - 1|$$

4. (e) On a donc :

$$\forall n \geq n_0, \ 0 \leq 2^n \times |x_n - 1| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \underbrace{3^{n_0} |x_{n_0} - 1|}_{\text{constante}}$$

donc par encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n \times |x_n - 1| = 0$

et donc $x_n \underset{n \to +\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$