1. $\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow [0, 2\pi]$
$t \longmapsto t - \sin t$

$\varphi$ est $C^1$ sur $[0, 2\pi]$ comme somme de fonctions qui le sont.

$\forall t \in [0, 2\pi], \ \varphi'(t) = 1 - \cos t$

donc $\forall t \in ]0, 2\pi[, \ \varphi'(t) > 0$

On en déduit que $\varphi$ est continue et strictement croissante sur $[0, 2\pi]$ donc bijective de $[0, 2\pi]$ vers $\varphi([0, 2\pi]) = [0, 2\pi]$.

Elle admet donc une bijection réciproque $\varphi^{-1} : [0, 2\pi] \longrightarrow [0, 2\pi]$ qui est continue et strictement croissante sur $[0, 2\pi]$.

Comme $\varphi$ est dérivable sur $]0, 2\pi[$ et $\varphi'$ ne s'annule pas sur $]0, 2\pi[$ on sait que $\varphi^{-1}$ est dérivable sur $\varphi(]0, 2\pi[) = ]0, 2\pi[$

De plus $\forall t \in ]0, 2\pi[, \ (\varphi^{-1})'(t) = \dfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} = \dfrac{1}{1 - \cos(\varphi^{-1}(t))}$

2. $\varphi^{-1}$ est continue sur $[0, 2\pi]$ à valeurs dans $[0, 2\pi]$.
$\psi$ est continue sur $[0, 2\pi]$

Par composition : $f$ est continue sur $[0, 2\pi]$.

De même : $f$ est dérivable sur $]0, 2\pi[$

3. Pour $t \in ]0, 2\pi[$ :

$$f'(t) = (\varphi^{-1})'(t) \times \Psi'(\varphi^{-1}(t))$$

$$= \frac{1}{1 - \cos(\varphi^{-1}(t))} \times \sin \varphi^{-1}(t)$$

$$= \frac{\sin \varphi^{-1}(t)}{1 - \cos \varphi^{-1}(t)}$$ du signe de $\sin \varphi^{-1}(t)$

car $\cos \varphi^{-1}(t) - 1 < 0$

Mais

| $t$ | $0$ | | $\pi$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi^{-1}$ | $0$ | $\nearrow$ | $\pi$ | $\nearrow$ | $2\pi$ |

Donc

| $t$ | $0$ | | $\pi$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin \varphi^{-1}(t)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |

Donc

| $t$ | $0$ | | $\pi$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $0$ |

Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $2\pi - t \in [0, 2\pi]$

De plus :

$$f(2\pi - t) = \Psi\left(\varphi^{-1}(2\pi - t)\right)$$

Mais $\forall x \in [0, 2\pi]$, $\varphi(2\pi - x) = 2\pi - \varphi(x)$

donc pour $x = \varphi^{-1}(t)$ :

$$\varphi\left(2\pi - \varphi^{-1}(t)\right) = 2\pi - t$$

donc $2\pi - \varphi^{-1}(t) = \varphi^{-1}(2\pi - t)$

Ainsi $f(2\pi - t) = \Psi\left(2\pi - \varphi^{-1}(t)\right) = 1 - \cos \varphi^{-1}(t)$

$$= \Psi\left(\varphi^{-1}(t)\right) = f(t)$$

$\boxed{\text{Donc la droite d'équation } x = \pi \text{ est axe de symétrie pour } \mathcal{C}_f}$

On a $\varphi^{-1}(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0^+$ car $\varphi(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0^+$

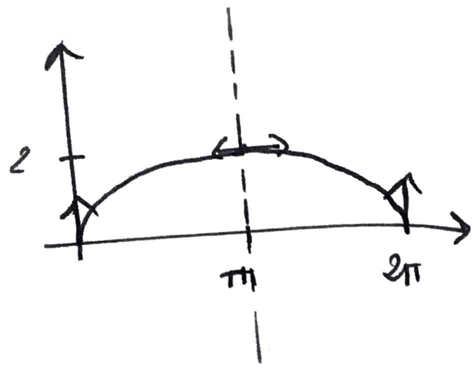
de plus $\dfrac{\sin x}{1 - \cos x} \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{x}{x^2/2} = \dfrac{2}{x}$

Donc $f'(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} +\infty$ par composition de limites.

On a $f$ continue sur $[0, 2\pi[$ et dérivable sur $]0, 2\pi[$. Donc d'après la petite règle de l'Hospital : $f$ non dérivable en $0$

Par symétrie : $\nexists f'$ non dérivable en $\pi$.

4.




C'est une "arche" de cycloïde.