2. $f(x) = \begin{cases} 1 - e^x \text{ si } x < 0 \\ -\ln(1+x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

$x \longmapsto 1 - e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*_-$ (car somme de fonctions dérivables) donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*_-$.

$x \longmapsto 1+x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^*_+$.

$\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$.

Par composition : f est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$.

Ainsi : f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

$f(0^+) = 0 = f(0^-)$.

Donc si on pose $f(0) = 0$ alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et f est continue en 0.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Si $x < 0$: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1 - e^x}{x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} -1$ car $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$

Si $x > 0$: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\dfrac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} -1$ car $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$

Donc $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}]{} -1$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. $f(x) = \sqrt{|1-x^2|}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$x \longmapsto 1 - x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc $x \longmapsto |1-x^2|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

$x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

$x \longmapsto 1 - x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$.

$x \longmapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Donc $x \longmapsto |1-x^2|$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

$x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Si $x \in]-1, 1[$: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

donc $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

donc $f'(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} -\infty$ et $f'(x) \xrightarrow[x \to (-1)^+]{} +\infty$

On a f continue sur $]-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$.

D'après le théorème de la limite de la dérivée,

f n'est pas dérivable à gauche en 1.

De même on montre que f n'est pas dérivable à droite en -1.

Si $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{donc} \quad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Donc $f'(x) \xrightarrow[x \to (-1)^-]{} -\infty$ et $f'(x) \xrightarrow[x \to 1^+]{} +\infty$

De même que précédemment on montre que f n'est pas dérivable à gauche en -1 et n'est pas dérivable à droite en 1.