On pose $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

$x \in \mathcal{D}_f \iff -1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1 \iff -(1+x^2) \leqslant 2x \leqslant 1+x^2$

$\iff 0 \leqslant 1+x^2+2x$ et $0 \leqslant 1+x^2-2x$

$\iff 0 \leqslant (1+x)^2$ et $0 \leqslant (1-x)^2$

Donc $\underline{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$.

$x \longmapsto \frac{2x}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas) et à valeurs dans $[-1,1]$.

arcsin est continue sur $[-1,1]$.

Donc f est $\underline{\text{continue sur } \mathbb{R}}$.

$x \longmapsto \frac{2x}{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ et à valeurs dans $]-1,1[$.

arcsin est dérivable sur $]-1,1[$.

Donc f est $\underline{\text{dérivable sur } \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $f'(x) = \dfrac{\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} = \dfrac{2(1-x^2)\,|1+x^2|}{|1-x^2|\,(1+x^2)^2}$

$= \dfrac{2.(1-x^2)}{|1-x^2|.(1+x^2)}$ car $1+x^2 \geqslant 0$ donc $|1+x^2| = 1+x^2$

- Si $x \in]-1,1[$: $1-x^2 \geqslant 0$ donc $|1-x^2| = 1-x^2$

$$\text{donc } f'(x) = \frac{2}{1+x^2} = 2\arctan'(x)$$

Donc $f - 2.\arctan$ est constante sur $[-1,1]$ (car f continue sur $[-1,1]$).

$f(0) - 2.\arctan(0) = 0$.

Donc $f(x) = 2\arctan(x)$

- Si $x \in]1,+\infty[\cup]-\infty,-1[$: $1-x^2 \leqslant 0$ donc $|1-x^2| = x^2-1$

$$\text{donc } f'(x) = -\frac{2}{1+x^2} = -2\arctan'(x)$$

Donc $f + 2.\arctan$ est constante sur $]1,+\infty[$ et $]-\infty,-1[$

(pas besoin d'ajouter les cas $x=-1$ et $x=1$ car ils ont déjà été traités auparavant).

$f(1) + 2.\arctan(1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

$f(-1) + 2.\arctan(-1) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$

donc $f(x) = -2\arctan(x) - \pi$ si $x < -1$

$f(x) = -2\arctan(x) + \pi$ si $x > 1$

- Conclusion : $\boxed{\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} -2.\arctan(x) - \pi & \text{si } x < -1 \\ 2.\arctan x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -2.\arctan(x) + \pi & \text{si } x > 1 \end{cases}}$