2.(a) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $x \longmapsto x^{1-\alpha}$ est (i) continue sur $[n, n+1]$

(ii) dérivable sur $]n, n+1[$

car dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists c_n \in]n, n+1[\,;\ \frac{(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{n+1-n} = (1-\alpha)\, c_n^{-\alpha}$$

$$\text{ie } (n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha} = \frac{(1-\alpha)}{c_n^\alpha}$$

Mais $c_n \in]n, n+1[$ et $\alpha > 0$ donne :

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} < \frac{1}{c_n^\alpha} < \frac{1}{n^\alpha}$$

Comme $1-\alpha > 0$ on a :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \frac{1-\alpha}{(n+1)^\alpha} < (n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha} < \frac{1-\alpha}{n^\alpha}}$$

2.(b) Par somme d'inégalités, pour $n \geqslant 1$:

$$(1-\alpha).\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant (n+1)^{1-\alpha} - 1 \leqslant (1-\alpha).\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\text{ie } (1-\alpha).\left[H_n + \frac{1}{(n+1)^\alpha} - 1\right] \leqslant (n+1)^{1-\alpha} - 1 \leqslant (1-\alpha).H_n$$

Donc pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(n+1)^{1-\alpha} - 1 \leqslant (1-\alpha).H_n \leqslant (n+1)^{1-\alpha} \cancel{-1} - \frac{1-\alpha}{(n+1)^\alpha} \cancel{+1} - \alpha$$

Comme $1-\alpha > 0$ on a $(n+1)^{1-\alpha} - 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

on a $(1-\alpha)H_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ par minoration

donc $H_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

On conjecture que $H_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Prouvons le :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - \frac{1}{n^{1-\alpha}} \leqslant \frac{H_n}{\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - \frac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}(n+1)^\alpha} - \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$$

Comme $1-\alpha > 0$ et $\alpha > 0$ on obtient par encadrement :

$$\frac{H_n}{\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

Donc $\boxed{H_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$

Par exemple si $\alpha = \dfrac{1}{2}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2.\sqrt{n}$