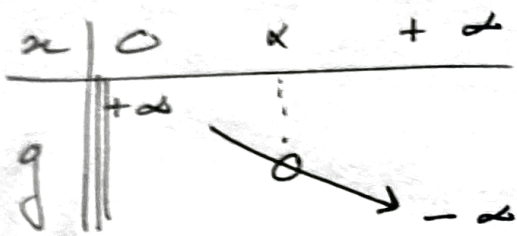


1 On pose $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - x = 4 - \frac{1}{4} \ln x - x$

g est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ (somme de fonctions qui le sont) et $\forall x > 0, g'(x) = -\frac{1}{4}x - 1 = -\frac{x+4}{4} < 0$



g est continue et strictement
décroissante de $]0, +\infty[$

vers $g(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$.

Elle est donc bijective de $]0, +\infty[$ vers \mathbb{R} .

Comme $0 \in \mathbb{R} : \exists ! \alpha > 0, g(\alpha) = 0$.

Donc l'équation $f(x) = x$ a une unique solution $x > 0$.

$g(3) = 4 - \frac{1}{4} \ln 3 > 0 = g(\alpha)$

$g(4) = 4 - \frac{1}{4} \ln 4 < 0 = g(\alpha)$

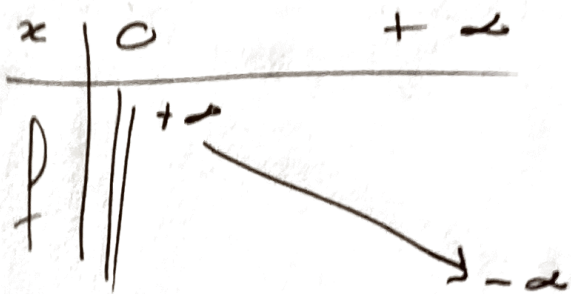
Comme g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$:

$3 < \alpha$ et $4 > \alpha$

ie $\alpha \in]3, 4[$

2. De même f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$

et $\forall x > 0, f'(x) = -\frac{1}{4x}$



$$f(3) = 4 - \frac{1}{4} \ln 3 \in]3, 4[$$

$$f(4) = 4 - \frac{1}{4} \ln 4 \in]3, 4[$$

$$\text{donc } 3 < f(4) < f(3) < 4$$

$$\text{donc }]f(4), f(3)[\subseteq]3, 4[$$

Comme f str.^t décroissante et continue:

$$f(]3, 4[) =]f(4), f(3)[\subseteq]3, 4[$$

Donc $]3, 4[$ est stable par f .

De plus si $x \in]3, 4[$, $|f'(x)| = \frac{1}{4x} \leq \frac{1}{12}$ car $x > 3$

3. (x_n) est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in]3, 4[$
ouïgue $]3, 4[$ est stable par f .

Comme f est dérivable sur $]3, 4[$ et comme
 $\forall x \in]3, 4[, |f'(x)| \leq \frac{1}{12}$

l'inégalité des accroissements finis donne :

$$\forall (x, y) \in]3, 4[^2, |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{12} |x - y|$$

Comme x_n et α sont $]3, 4[$:

$$|f(x_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{12} |x_n - \alpha| \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{ie } |x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12} |x_n - \alpha|$$

$$\text{Par récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, |x_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n} |x_0 - \alpha|$$

$$\text{Comme } \frac{1}{12^n} |x_0 - \alpha| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{on a par encadrement : } x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$$