- $\mathbb{F} = \text{Vect}((1,1,\dots,1))$ est un <u>sev de $\mathbb{K}^n$</u>.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(u,v) \in \mathbb{E}^2$. On note $u = (x_1, \dots, x_n)$ et $v = (x'_1, \dots, x'_n)$

Alors $\lambda u + v = (\lambda x_1 + x'_1, \dots, \lambda x_n + x'_n)$

Et $\sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k + x'_k) = \lambda . \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} x'_k = 0$ car $u \in \mathbb{E}$ et $v \in \mathbb{E}$

donc $\lambda . u + v \in \mathbb{E}$.

Ceci prouve que <u>$\mathbb{E}$ est un sev de $\mathbb{K}^n$</u>.

- Montrons que $\mathbb{K}^n = \mathbb{E} \oplus \mathbb{F}$ par analyse - synthèse.

Soit $u \in \mathbb{K}^n$ fixé qcq.

<u>Analyse</u> On suppose que $u = a + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{E} \times \mathbb{F}$.

$a \in \mathbb{E}$ donc on peut noter $a = (a_1, \dots, a_n)$ avec $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$

$b \in \mathbb{F}$ donc on peut noter $b = (\lambda, \dots, \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

$u \in \mathbb{K}^n$ donc on peut noter $u = (x_1, \dots, x_n)$.

$u = a + b$ donne alors $\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda \\ x_2 = a_2 + \lambda \\ \vdots \\ x_n = a_n + \lambda \end{cases}$

En additionnant : $\sum_{k=1}^{n} x_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k}_{=0} + n.\lambda$

donc $d = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$.

Et donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = x_k - d = x_k - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

On a donc $\boxed{\begin{array}{l} a = \left(x_1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, x_2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \ldots, x_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \\ b = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \ldots, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \end{array}}$

Donc si la décomposition existe alors elle est unique.

<u>Synthèse :</u> On définit a et b comme précédemment.

Il est évident que $\underline{u = a + b}$

et $\underline{b \in F}$

Et $\underline{a \in E}$ car $x_1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + x_2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \ldots + x_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i - n \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

Donc la décomposition existe.

Donc par analyse-synthèse : $\boxed{\mathbb{K}^n = E \oplus F}$