TD 13 Ex 1

1. On suppose que $A \cap B = \emptyset$.

Donc $B \subseteq \overline{A}$ donc $\mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Et donc : $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}(A) \times (1 - \mathbb{P}(A))$

Etudions la fonction $f : x \longmapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$.

Elle est dérivable (polynomiale) et $\forall x \in [0,1]$, $f'(x) = 1 - 2x$

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$			0		
f	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0

Donc $\forall x \in [0,1]$, $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$

Comme $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$ on a donc : $\boxed{0 \leqslant \mathbb{P}(A) . \mathbb{P}(B) \leqslant \dfrac{1}{4}}$.

2. $B = (B \cap A) \uplus (B \cap \overline{A})$

Par additivité de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$$

Donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$

Donc $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A) . \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B) \times [1 - \mathbb{P}(A)] - \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$

$$= \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(\overline{A}) - \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

En réinjectant $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$ on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A) . \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) . \mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) . \mathbb{P}(\overline{A}) - \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

$$= \mathbb{P}(A \cap B) . \mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \times \underbrace{[\mathbb{P}(\overline{A}) - 1]}_{= -\mathbb{P}(A)}$$

Donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A\cap B).\mathbb{P}(\bar{A}) - \mathbb{P}(\bar{A}\cap B).\mathbb{P}(A)}$$

2.(b) Comme $\mathbb{P}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$:

$$-\mathbb{P}(\bar{A}\cap B).\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}(A\cap B).\mathbb{P}(\bar{A})$$

Comme $\bar{A}$ et $A\cap B$ sont incompatibles : $\mathbb{P}(A\cap B).\mathbb{P}(\bar{A}) \leqslant \frac{1}{4}$

et comme $\bar{A}\cap B$ et A sont incompatibles : $\mathbb{P}(\bar{A}\cap B).\mathbb{P}(A) \leqslant \frac{1}{4}$

Donc : $-\frac{1}{4} \leqslant \mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B) \leqslant \frac{1}{4}$

donc $\boxed{|\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)| \leqslant \frac{1}{4}}$

2.(c) On lance une pièce équilibrée.

$A =$ "on obtient pile"

$B =$ "on obtient face"

$A\cap B = \emptyset$

donc $|\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)| = |0 - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}| = \frac{1}{4}$

Donc oui on peut avoir égalité.