Ex 14 TD 13

On définit les événements :

A = "on choisit le dé A"

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, R_k = "le k-ième lancer donne une face rouge"

1. D'après la formule des probabilités totales avec le sce $(A, \overline{A})$:

$$\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(R_1) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(R_1)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{4}{6} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{6} = \frac{8}{18} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

De même :

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(R_1 \cap R_2)$$

Comme le dé choisi est lancé de manières indépendantes les événements R_1 et R_2 sont indépendants pour $\mathbb{P}_A$ et $\mathbb{P}_{\overline{A}}$. Donc :

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(R_1) \times \mathbb{P}_A(R_2) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(R_1) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(R_2)$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{6}\right)^2 + \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \boxed{\frac{2}{9}}$$

De plus on trouve aussi $\mathbb{P}(R_2) = \frac{4}{9}$.

On a donc $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) \neq \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}(R_2)$

donc <u>R_1 et R_2 ne sont pas indépendants</u>.

2. $$\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3) = \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)}$$

De même qu'au 1. on sait que R_1, R_2, R_3 sont mutuellement indépendants pour $\mathbb{P}_A$ et $\mathbb{P}_{\bar{A}}$ donc :

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{6}\right)^3 + \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{10}{81}$$

puis $$\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3) = \boxed{\frac{5}{9}}$$

3. D'après la formule de Bayes utilisée avec le sce $(A, \bar{A})$:

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap \ldots \cap R_n}(A) = \frac{\mathbb{P}_A(R_1 \cap \ldots \cap R_n) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}_A(R_1 \cap \ldots \cap R_n) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\bar{A}}(R_1 \cap \ldots \cap R_n) \times \mathbb{P}(\bar{A})}$$

Et $R_1, \ldots, R_n$ sont mutuellement indépendants pour $\mathbb{P}_A$ et pour $\mathbb{P}_{\bar{A}}$. Donc :

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap \ldots \cap R_n}(A) = \frac{\left(\frac{4}{6}\right)^n \times \frac{1}{3}}{\left(\frac{4}{6}\right)^n \times \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{6}\right)^n \times \frac{2}{3}} = \boxed{\frac{4^n}{4^n + 2^{n+1}}}$$