1.(a) On note U_a l'évènement :

"le joueur termine le jeu ruiné étant initialement parti d'une fortune de a"

Donc $u_a = \mathbb{P}(U_a)$.

On note aussi G_1 l'évènement "le joueur gagne le 1er tour".

Comme $(G_1, \overline{G_1})$ est un sce, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(U_a) = \mathbb{P}(G_1) \times \mathbb{P}_{G_1}(U_a) + \mathbb{P}(\overline{G_1}) \times \mathbb{P}_{\overline{G_1}}(U_a)$$

or $\mathbb{P}_{G_1}(U_a) = \mathbb{P}(U_{a+1}) = u_{a+1}$

$\mathbb{P}_{\overline{G_1}}(U_a) = \mathbb{P}(U_{a-1}) = u_{a-1}$

on ne peut pas vraiment justifier ces formules en PCSI, mais intuitivement si le joueur gagne le 1er tour, tout se passe comme s'il commençait le jeu avec $a+1$ €, et s'il perd le 1er tour, tout se passe comme s'il commençait le jeu avec $a-1$ €.

On a donc $u_a = p \cdot u_{a+1} + q \cdot u_{a-1}$.

1.(b) La suite (u_a) est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $z = pz^2 + q$

ie $pz^2 - z + q = 0$

On remarque que $z=1$ est racine évidente.

L'autre racine est donc $\frac{q}{p}$ (formules de Viet).

Il existe donc $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que : (ici $\frac{q}{p}\neq 1$ donc $\Delta>0$)

$$u_a=\lambda\cdot 1^a+\mu\left(\frac{q}{p}\right)^a=\lambda+\mu\left(\frac{q}{p}\right)^a$$

Or $\begin{cases} u_0=1=\lambda+\mu \\ u_N=0=\lambda+\mu\left(\frac{q}{p}\right)^N \end{cases}$ donc $\begin{cases} \lambda=\dfrac{-\left(\frac{q}{p}\right)^N}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} \\ \mu=\dfrac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} \end{cases}$

Donc $\boxed{u_a=\dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^a-\left(\frac{q}{p}\right)^N}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}}$

Si $q<p$ ie $p>\frac{1}{2}$: $\left(\frac{q}{p}\right)^N\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$

Si $q>p$ ie $p<\frac{1}{2}$: $\left(\frac{q}{p}\right)^N\xrightarrow[N\to+\infty]{}+\infty$

Donc $\boxed{u_a\xrightarrow[N\to+\infty]{}\begin{cases} 1 & \text{si } p<\frac{1}{2} \\ \left(\frac{q}{p}\right)^a & \text{si } p>\frac{1}{2} \end{cases}}$

2. On peut reprendre les calculs depuis le début ou raisonner ainsi.

	Joueur	Casino
fortune	a	$N-a$
proba de gain	p	q

Donc $V_a = \dfrac{\left(\frac{p}{q}\right)^{N-a} - \left(\frac{p}{q}\right)^N}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N} = \dfrac{\left(\frac{p}{q}\right)^N}{\left(\frac{p}{q}\right)^N} \times \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}$

$$\boxed{V_a = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}}$$

3. $\boxed{U_a + V_a = 1}$

Donc $\mathbb{P}(U_a) + \mathbb{P}(V_a) = 1$

Comme $U_a \cap V_a = \emptyset$ on a $\mathbb{P}(U_a \cup V_a) = 1$

Donc l'événement $U_a \cup V_a$ se produit avec probabilité 1.

Donc la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais est :

$$\boxed{\mathbb{P}(\overline{U_a} \cap \overline{V_a}) = 1 - 1 = 0}$$

4. Par cela, 1 est racine double de l'équation caractéristique.

Donc $\exists(\alpha,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u_a = (\alpha a + \mu) 1^a$
$= \alpha a + \mu$

$$\begin{cases} u_0 = 1 = \mu \\ u_N = 0 = \alpha N + \mu \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{N} \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Donc $\boxed{u_a = 1 - \dfrac{a}{N} = \dfrac{N-a}{N} \quad \text{et} \quad v_a = \dfrac{a}{N}}$

$\boxed{u_a \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1}$ Et $\boxed{u_a + v_a = 1}$