Le parapluie

Pour $k \in [\![1,7]\!]$ on note :

$E_k =$ " le parapluie est au k-ième étage "

1. On note $A =$ " le parapluie est dans l'immeuble "

On voit que $A = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_7 = \bigcup_{k=1}^{7} E_k$

Comme les événements $E_1, \ldots, E_7$ sont 2 à 2 incompatibles

on a $\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{7} \mathbb{P}(E_k) = \sum_{k=1}^{7} \frac{p}{7} = \boxed{p}$

2. On note $B =$ " le parapluie n'est pas dans les 6 premiers étages "

On voit $B = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \ldots \cap \overline{E_6} = \bigcap_{k=1}^{6} \overline{E_k}$

On demande $\mathbb{P}_B(E_7)$.

Par définition $\mathbb{P}_B(E_7) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap E_7)}{\mathbb{P}(B)}$

D'après les lois de Morgan : $\overline{B} = \bigcup_{k=1}^{6} E_k$

Par additivité : $\mathbb{P}(\overline{B}) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(E_k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{p}{7} = \frac{6p}{7}$

donc $\mathbb{P}(B) = 1 - \frac{6p}{7} = \frac{7-6p}{7}$

Pour $B \cap E_7$ on remarque que $E_7 \subset B$.

En effet : si le parapluie est au 7ième étage alors il n'est pas dans les 6 premiers.

La structure "si ... alors ..." se traduit par l'inclusion.

On a donc $E_7 \cap B = E_7$

donc $\mathbb{P}(E_7 \cap B) = \mathbb{P}(E_7) = \frac{p}{7}$

Finalement : $\boxed{\mathbb{P}_B(E_7) = \frac{p}{7-6p}}$

vérif si $p = 1$ le parapluie est à coup sûr dans l'immeuble. On trouve $\mathbb{P}_B(E_7) = 1$ ce qui est cohérent.