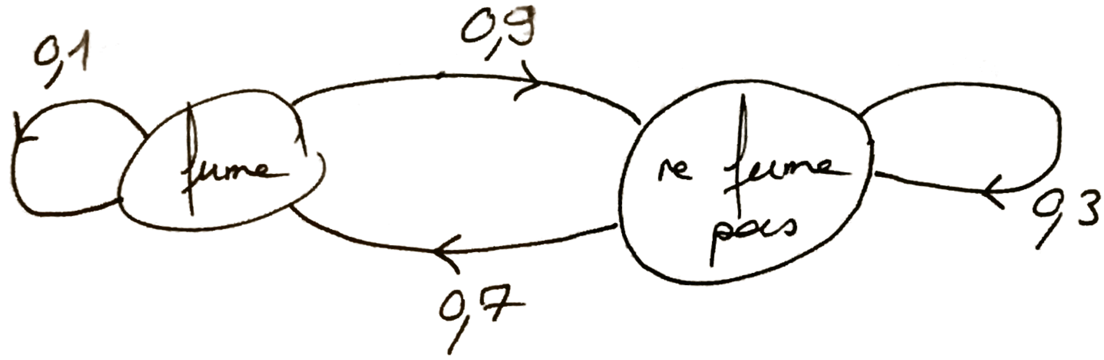
Le fumeur



1. Fixons $n \in \mathbb{N}$.

La famille $(A_n, \overline{A_n})$ est un sce donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{A_n}) \times \mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$$

ie $p_{n+1} = p_n \times 0,1 + (1 - p_n) \times 0,7$

donc $\boxed{p_{n+1} = -0,6 \times p_n + 0,7}$

2. On reconnaît une suite arithmético-géométrique.

On cherche $l \in \mathbb{R}$ tq $l = -0,6 \times l + 0,7$

ie $l = \frac{0,7}{1,6} = \frac{7}{16}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} - l = -0,6 \times (p_n - l)$

donc $p_n - l = (-0,6)^{n-1} \times (p_1 - l)$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = (-0,6)^{n-1} \times (p_1 - l) + l}$

Comme $-1 < -0,6 < 1$ on a :

$$p_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{7}{16}$$

Au bout d'un temps très long il y a 7 chances sur 16 que le fumeur fume encore.