On a déjà fait la preuve par analyse - synthèse.

Ici on peut utiliser l'exercice 7.

* $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) + \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$
$= n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$

* si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$

alors ${}^tM = M$ et ${}^tM = -M$

donc $M = -M$

donc $M = 0_n$

Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \subseteq \{0_n\}$

Comme $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

on a $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{0_n\}$

* Par le th de caractérisation des sev en dim finie

$$\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})}$$

<u>Rem:</u> Par contre cette méthode ne donne pas la décomposition

$$M = \frac{M + {}^tM}{2} + \frac{M - {}^tM}{2}$$