$\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{(0,1,1)}_{\vec{u_1}}, \underbrace{(1,0,2)}_{\vec{u_2}} \right)$ sev de $\mathbb{R}^3$.

On a vu dans la preuve du Th 18 que donner un supplémentaire de $\mathbb{G}$ de $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{R}$ c'est (i) se donner une base de $\mathbb{F}$, (ii) la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$, et (iii) de définir $\mathbb{G}$ comme l'espace engendré par les vecteurs utilisés pour compléter.

(i) $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont non colinéaires et donc $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ est <u>une base de $\mathbb{F}$</u>

(ii) On pose $\vec{u_3} = (1,0,0)$

Par l'absurde si $\vec{u_3} \in \mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ alors

$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \vec{u_3} = a\vec{u_1} + b\vec{u_2} = (b, a, a+2b)$

ce qui donne $\begin{cases} 1 = b \\ 0 = a \\ 0 = a+2b \end{cases}$. Absurde

Donc $\vec{u_3} \notin \mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \vec{u_2})$. Comme $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ est libre on en déduit que $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ est libre.

Comme $\mathrm{Card}(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

on en déduit que <u>$(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.</u>

(iii) On pose $\mathbb{G} \overset{\text{def}}{=} \text{Vect}(\vec{u_3})$.

Comme $\vec{u_3} \neq \vec{0}$ on sait que $(\vec{u_3})$ est une <u>base de $\mathbb{G}$</u>.

<u>Conclusion</u> On a $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ base de $\mathbb{F}$

$(\vec{u_3})$ base de $\mathbb{G}$

$(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ base de $\mathbb{R}^3$

D'après le (iii) du th 47 du chap 13 : $\boxed{\mathbb{R}^3 = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}}$