TD 14 Exercice 14

1. Comme $0 = 0 + 0 + 2 \times 0$ on a $(0)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}$

donc $\mathbb{E} \neq \emptyset$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $((u_n), (v_n)) \in \mathbb{E}^2$.

On pose $(w_n) = \lambda . (u_n) + (v_n)$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+3} = \lambda u_{n+3} + v_{n+3}$

$$\underset{\text{car } (u,v)\in\mathbb{E}^2}{=} \lambda (u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n) + (v_{n+2} + v_{n+1} + 2v_n)$$

$$= \lambda u_{n+2} + v_{n+2} + \lambda u_{n+1} + v_{n+1} + 2(\lambda u_n + v_n)$$

$$= w_{n+2} + w_{n+1} + 2w_n$$

Donc $(w_n) \in \mathbb{E}$.

Ceci prouve que $\mathbb{E}$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et donc que

<u>$\mathbb{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.</u>

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 2a_n$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 \times 2^n$

donc $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}((2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ et donc $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Ainsi <u>$\mathbb{F}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.</u>

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+2} = -b_{n+1} - b_n$: $\quad z^2 + z + 1 = 0 \iff z = e^{\pm i \frac{2\pi}{3}}$

donc $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \lambda \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \mu \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$

Donc $\mathbb{G} = \mathrm{Vect}\left(\left(\cos\frac{2n\pi}{3}\right)_n, \left(\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)_n\right)$

Donc $\mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et donc $\boxed{\mathbb{G} \text{ est un } \mathbb{R}\text{-ev}}$

2. Comme $(2^n)_n$ n'est pas la suite nulle, elle est une base de $\mathbb{F}$ et $\dim(\mathbb{F}) = 1$

Comme les suites $\left(\cos \frac{2n\pi}{3}\right)_n$ et $\left(\sin \frac{2n\pi}{3}\right)_n$ sont non colinéaires, elles forment une base de $\mathbb{G}$ et $\dim \mathbb{G} = 2$.

3. On admet que $\dim(\mathbb{E}) = 3$.

- Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 2a_n$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} + a_{n+1} + 2a_n = 4a_n + 2a_n + 2a_n = 8a_n = a_{n+3}$

Donc $\boxed{\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}}$

- Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+2} = -b_{n+1} - b_n$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+2} + b_{n+1} + 2b_n = b_{n+2} + b_{n+1} + 2(-b_{n+1} - b_{n+2})$

$= -b_{n+2} - b_{n+1} = b_{n+3}$

Donc $\boxed{\mathbb{G} \subseteq \mathbb{E}}$

- $\dim \mathbb{E} = 3 = 1 + 2 = \dim \mathbb{F} + \dim \mathbb{G}$.

- $\mathbb{F} \cap \mathbb{G} \subseteq \{(0)_n\}$ car $\mathbb{F}, \mathbb{G}$ sev de $\mathbb{E}$.

Réciproquement soit $(u_n) \in \mathbb{F} \cap \mathbb{G}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 2^n$

D'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$

donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{n+2} u_0 = -2^{n+1} u_0 - 2^n u_0$

Pour $n=0$: $4u_0 = -2u_0 - u_0$ donc $u_0 = 0$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0 \times 2^n = 0$

Donc $\mathbb{F} \cap \mathbb{G} \subseteq \{(0)_n\}$.

Donc par double-inclusion : $\boxed{\mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \{(0)_n\}}$

On peut donc conclure que $\boxed{\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}}$

Une base de $\mathbb{E}$ peut être obtenue par concaténation d'une base de $\mathbb{F}$ et d'une base de $\mathbb{G}$.

La famille $\left((2^n)_n, \left(\cos \frac{2n\pi}{3}\right), \left(\sin \frac{2n\pi}{3}\right)_n\right)$ est donc une base de $\mathbb{E}$.

---

4. Comme $(u_n) \in \mathbb{E}$ il existe donc $(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tq

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda . 2^n + \mu . \cos \frac{2n\pi}{3} + \gamma . \sin \frac{2n\pi}{3}$

On a $\begin{cases} u_0 = 1 = \lambda + \mu \\ u_1 = 0 = 2\lambda + \mu \frac{-1}{2} + \gamma \frac{\sqrt{3}}{2} \\ u_2 = 2 = 4\lambda + \mu \frac{-1}{2} + \gamma \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

L_2+L_3 donne $2 = 6\lambda - \mu$

Avec L_1 on trouve $7\lambda = 3$ donc $\lambda = \frac{3}{7}$

puis $\mu = \frac{4}{7}$ et $\gamma = -\frac{8}{7\sqrt{3}} = -\frac{8\sqrt{3}}{21}$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3}{7}\cdot 2^n + \frac{4}{7}\cdot \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - \frac{8\sqrt{3}}{21}\cdot \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}$

5. On sait déjà que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sev de $\mathbb{E}$ donc $\mathbb{F}+\mathbb{G} \subseteq \mathbb{E}$.

Soit $(u_n) \in \mathbb{E}$ fixé.

Analyse On suppose que $u = a+b$ avec $a \in \mathbb{F}$ et $b \in \mathbb{G}$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a_n + b_n$. (1)

De plus $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 2a_n$ puisque $a \in \mathbb{F}$ (2)

$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+2} = -b_{n+1} - b_n$ puisque $b \in \mathbb{G}$ (3)

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{2n+2} + u_{n+1} + 2u_n$ puisque $u \in \mathbb{E}$ (4)

On a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_{n+1} + u_n \overset{(1)}{=} a_{n+2} + a_{n+1} + a_n + b_{n+2} + b_{n+1} + b_n$

$\overset{(2),(3)}{=} 4a_n + 2a_n + a_n + 0$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{7}(u_n + u_{n+1} + u_{n+2})}$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \overset{(1)}{=} u_n - a_n = \frac{1}{7}(6u_n - u_{n+1} - u_{n+2})}$

Donc $\mathbb{F}+\mathbb{G} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ puisque a et b sont uniques.

<u>Synthèse</u> On définit a et b suites réelles par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{7}(u_n + u_{n+1} + u_{n+2}) \text{ et } b_n = \frac{1}{7}(6u_n - u_{n+1} - u_{n+2})$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n + b_n = u_n$

Donc $\underline{u = a + b}$

Ensuite $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{7}(u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3})$

$$= \frac{1}{7}(2u_{n+1} + 2u_{n+2} + 2u_n) \text{ car } u \in \mathbb{E}$$

$$= 2a_n$$

Donc $\underline{a \in \mathbb{F}}$

Enfin $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+2} + b_{n+1} + b_n = \frac{1}{7}(6u_{n+2} - u_{n+3} - u_{n+4} + 6u_{n+1} - u_{n+2} - u_{n+3}$

$$+ 6u_n - u_{n+1} - u_{n+2})$$

$$= \frac{1}{7}(6u_n + 5u_{n+1} + 4u_{n+2} - 2u_{n+3} - u_{n+4})$$

Mais $u_{n+4} = u_{n+3} + u_{n+2} + 2u_{n+1} = 2u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n$

$u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n$

puisque $u \in \mathbb{E}$

donc $b_{n+2} + b_{n+1} + b_n = \frac{1}{7}(6u_n + 5u_{n+1} + 4u_{n+2} - 2u_{n+2} - 2u_{n+1} - 4u_n$

$$- 2u_{n+2} - 3u_{n+1} - 2u_n)$$

$$= 0$$

Donc $\underline{b \in \mathbb{G}}$. Donc $\mathbb{E} \subset \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$

Ainsi on peut conclure que $\boxed{\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}}$