$\mathbb{E} = \text{Vect}\big(\underbrace{(1,-1,3,-3)}_{\vec{u_1}}, \underbrace{(2,-2,4,-4)}_{\vec{u_2}}, \underbrace{(3,-3,7,-7)}_{\vec{u_3}}, \underbrace{(1,-1,1,-1)}_{\vec{u_4}}\big)$

Comme $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ on sait que $\mathbb{E}$ est un sev de $\mathbb{R}^4$ [th16 chap13].

1. Comme $\mathbb{E}$ est engendré par 4 vecteurs on sait que $\mathbb{E}$ est de dimension finie [def 1 chap15]

et $\dim \mathbb{E} \leq 4$ [th 8 chap 15]

Pour calculer $\dim(\mathbb{E})$ il faut trouver une base de $\mathbb{E}$ [def 7 chap15] et pour la trouver on va l'extraire de la famille génératrice $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4})$ avec l'algorithme vu dans la démonstration du th 2.

- La famille $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4})$ est-elle libre ?

On voit que $\vec{u_1} + \vec{u_2} = \vec{u_3}$
$\vec{u_2} - \vec{u_1} = \vec{u_4}$

donc $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4})$ est liée et

$\mathbb{E} = \text{Vect}(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ d'après le principe de réduction d'une famille génératrice.

• La famille $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ est-elle libre ?

Oui car $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont non colinéaires.

• La famille $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ est donc <u>une base de $\mathbb{E}$</u>.

et <u>$\dim(\mathbb{E}) = 2$</u>

<u>2.</u> Soit $\vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

On cherche à quelle(s) condition(s) $\vec{v} \in \mathbb{E}$.

$\vec{v} \in \mathbb{E} \iff \vec{v}$ est CL de $\vec{u_1}, \vec{u_2}$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 ; \ \vec{v} = a\vec{u_1} + b\vec{u_2}$$

$$\iff \begin{cases} a + 2b = x \\ -a - 2b = y \\ 3a + 4b = z \\ -3a - 4b = t \end{cases} \quad \text{compatible}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{a} + 2b = x & \\ 0 = x + y & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -2b = z - 3x & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ 2b = t + 3x & L_4 + 3L_1 \end{cases} \quad \text{compatible}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{a} + 2b = x \\ 0 = x + y \\ \boxed{-2b} = z - 3x \\ 0 = z + t \end{cases} \quad \text{compatible} \iff x + y = z + t = 0$$

système échelonné

Donc $\boxed{E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; \; x+y = z+t = 0\}}$

⚠ on vérifie que $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ vérifient les équations trouvées

3. $\mathbb{F} = \text{Vect}(\underbrace{(1,0,1,-1)}_{\vec{v_1}}, \underbrace{(0,1,2,-2)}_{\vec{v_2}}, \underbrace{(1,0,0,0)}_{\vec{v_3}}, \underbrace{(0,0,-1,1)}_{\vec{v_4}})$

$\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{R}^4$.

Pour montrer que $E \subseteq \mathbb{F}$ on a 2 méthodes.

<u>méthode 1</u> montrer que $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ sont CL des vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}$ [cor 18 chap 13]

<u>méthode 2</u> déterminer les équations cartésiennes de $\mathbb{F}$.

<u>Dans tous les cas</u> on peut déjà réduire au maximum la famille génératrice $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4})$ génératrice de $\mathbb{F}$.

On voit que $\vec{v_1} = \vec{v_3} - \vec{v_4}$.

Donc $\mathbb{F} = \text{Vect}(\vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4})$

* <u>méthode 1</u> $\vec{u_1} = \vec{v_3} - \vec{v_2} - 5\vec{v_4}$

$\vec{u_2} = 2\vec{v_3} - 2\vec{v_2} - 8\vec{v_4}$

donc $\vec{u_1} \in \mathbb{F}$ et $\vec{u_2} \in \mathbb{F}$

Comme $\text{Vect}(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ est le + petit sev contenant $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$

on a $\mathbb{E} = \text{Vect}(\vec{u_1}, \vec{u_2}) \subseteq \mathbb{F}$

* <u>méthode 2</u> Soit $\vec{w} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\vec{w} \in \mathbb{F} \iff \begin{cases} b = x \\ \boxed{a} = y \\ 2a - c = z \\ -2a + c = t \end{cases} \quad \text{compatible}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{a} = y \\ \boxed{b} = x \\ \boxed{-c} = z - 2y \\ c = t + 2y \end{cases} \quad \text{compatible}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{a} = y \\ \boxed{b} = x \\ \boxed{-c} = z - 2y \\ 0 = z + t \end{cases} \quad \text{compatible}$$

$$\iff z + t = 0$$

donc $\mathbb{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; z + t = 0\}$

et on voit que $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{F}$.

<u>4.</u> $\mathbb{G} = \text{Vect}((\underbrace{1,0,0,1}_{\vec{w_1}}), (\underbrace{1,3,0,0}_{\vec{w_2}}))$ sev de $\mathbb{R}^4$

⚠ Si on écrit $\mathbb{E} \cap \mathbb{G} = \text{Vect}(\vec{u_1}, \vec{u_2}) \cap \text{Vect}(\vec{w_1}, \vec{w_2})$

on ne peut rien en conclure !

Il faut les équations cartésiennes d'au moins un des sev. Ici on a celle de $\mathbb{E}$.

Soit $\vec{V} = (x, y, z, t) \in \mathbb{E} \cap \mathbb{G}$.

$\vec{V} \in \mathbb{G}$ donc $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 ; \vec{V} = a\vec{w_1} + b\vec{w_2}$

$$\vec{V} = (a+b, 2b, 0, a)$$

$\vec{V} \in \mathbb{E}$ donc $\begin{cases} a+b+2b = 0 \\ 0 + a = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$

donc $\vec{V} = \vec{0}$

Donc $\mathbb{E} \cap \mathbb{G} \subseteq \{\vec{0}\}$

donc $\underline{\mathbb{E} \cap \mathbb{G} = \{\vec{0}\}}$ puisque ce sont des sev.

<u>Rem:</u> $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ sont non colinéaires et forment donc une base de $\mathbb{G}$ et donc $\dim(\mathbb{G}) = 2$.

On a $\mathbb{E} \cap \mathbb{G} = \{\vec{0}\}$
$\mathbb{E}, \mathbb{G}$ sev de $\mathbb{R}^4$ et $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 = \dim(\mathbb{E}) + \dim(\mathbb{G})$

D'après le Th 21: $\boxed{\mathbb{R}^4 = \mathbb{E} \oplus \mathbb{G}}$