1. $P_1 = X^2+1 \quad P_2 = X^2+X+1 \quad P_3 = X^2+X$

La famille (P_1, P_2, P_3) est-elle libre ?

Soit a, b, c scalaires tels que $aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0_{\mathbb{K}[X]}$

$$\iff (a+b+c)X^2 + (b+c)X + a+b = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

$$\iff \begin{cases} a+b+c = 0 \\ b+c = 0 \\ a+b = 0 \end{cases} \iff \dots \iff a=b=c=0$$

car $(1, X, X^2)$ libre

Donc (P_1, P_2, P_3) est <u>libre</u>.

Or $\text{Card}(P_1, P_2, P_3) = 3 = \dim(\mathbb{K}_2[X])$ donc (P_1, P_2, P_3) est <u>libre maximale</u> dans $\mathbb{K}_2[X]$ donc est une <u>base de $\mathbb{K}_2[X]$</u>

2. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, $P_k = (X+1)^{k+1} - X^{k+1}$

$$\underset{\text{binôme}}{=} \cancel{X^{k+1}} + kX^k + \dots - \cancel{X^{k+1}}$$

$$= kX^k + \text{termes de degré} \leq k-1$$

donc $\deg(P_k) = k$

La famille $(P_1, \dots, P_n)$ est formée de polynômes <u>non nuls</u>

de degrés échelonnés donc elle libre.

Or $\mathrm{Card}(P_0, .., P_n) = n+1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$

donc la famille $(P_0, .., P_n)$ est libre maximale dans $\mathbb{K}_n[X]$ et donc est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

3. $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}(X^4+X, X)$ donc $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$.

Comme X^4+X et X sont non proportionnels, ils forment une famille libre donc une base de $\mathbb{F}$.

Donc $\dim \mathbb{F} = 2$

4. Cette fois $\deg P_0 = \deg P_1 = \ldots = \deg P_n = n$.

donc la famille n'est pas de degrés échelonnés.

Astuce elle est en fait échelonnée par rapport au terme de plus bas degré puisque $P_k = X^k +$ termes de $\deg \geqslant k+1$

Plus rigoureusement dans la base $(X^n, X^{n-1}, .., X, 1)$ qui est la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ écrite à l'envers la famille $(P_n, P_{n-1}, .., P_1, P_0)$ a une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & * & & & \\ 0 & 1 & & \text{\Large $*$} & \\ | & 0 & \ddots & & \\ | & | & \ddots & 1 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ qui est échelonnée.

Comme la famille $(P_n, P_{n-1}, \dots, P_1, P_0)$ est formée de polynômes non nuls on en déduit qu'elle est libre.

Donc la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est <u>libre</u>.

Comme $\mathrm{Card}\,(P_0, \dots, P_n) = n+1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ elle est une <u>base de $\mathbb{K}_n[X]$</u>