1.(a) Soit $k \in \mathbb{N}^+$.

Pour tout $t \in [k, k+1]$ on a :

$0 < k \leqslant t \leqslant k+1$

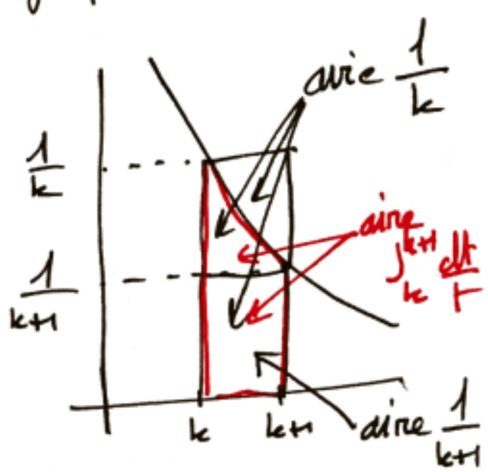
donc $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$ car $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ décroissante sur $\mathbb{R}^*_+$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{k}$$

$$\boxed{\text{ie } \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}}$$

Graphiquement :



1.(b) Soit $n \geqslant 1$. On somme les inégalités précédentes pour k allant de 1 à n :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}}_{\substack{\displaystyle \| \\ \displaystyle \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\ \displaystyle \| \\ \displaystyle \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - 1 \\ \displaystyle \| \\ \displaystyle H_{n+1} - 1}} \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}}_{\substack{\displaystyle \overset{\text{chasles}}{=} \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \\ \displaystyle = \ln(n+1) - \ln 1 \\ \displaystyle = \ln(n+1)}} \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}_{= H_n}$$

Donc :

$$\forall n \geq 1, \quad H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq H_n$$

On a donc $\forall n \geq 1, \quad \ln(n+1) \leq H_n$

Et aussi $\forall n \geq 1, \quad H_{n+1} \leq 1 + \ln(n+1)$

Par décalage d'indices : $\forall n \geq 2, \quad H_n \leq 1 + \ln(n)$

En regroupant les deux résultats :

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)}$$

<u>1.(c)</u> Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = H_n - \ln(n)$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - (H_n - \ln n)$

$$= H_{n+1} - H_n + \ln n - \ln(n+1)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq 0$$

Donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite <u>décroissante</u>.

D'après 1.(b) : $\forall n \geq 2, \quad u_n = H_n - \ln n \geq \ln(n+1) - \ln n$

≥ 0 car $\ln \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc $(u_n)_{n\geq 2}$ est minorée par 0.

D'après le théorème de la limite monotone, la suite $\boxed{(u_n)_{n\geq 1} \text{ est convergente}}$.

On note $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$ et $\ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

on a par quotient de limites :

$$\frac{u_n}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\gamma}{+\infty} = 0$$

Or $\forall n \geq 2$, $\dfrac{u_n}{\ln n} = \dfrac{H_n}{\ln n} - 1$

Donc par somme de limites finies :

$$\frac{H_n}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

ie $\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n}$

2. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont.

$\forall t > 0,\ f'(t) = \frac{1}{t} \times \frac{1}{t} - \ln t \times \frac{1}{t^2} = \frac{1 - \ln t}{t^2}$ du signe de $1 - \ln t$

t	0		e		$+\infty$
f	$\Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

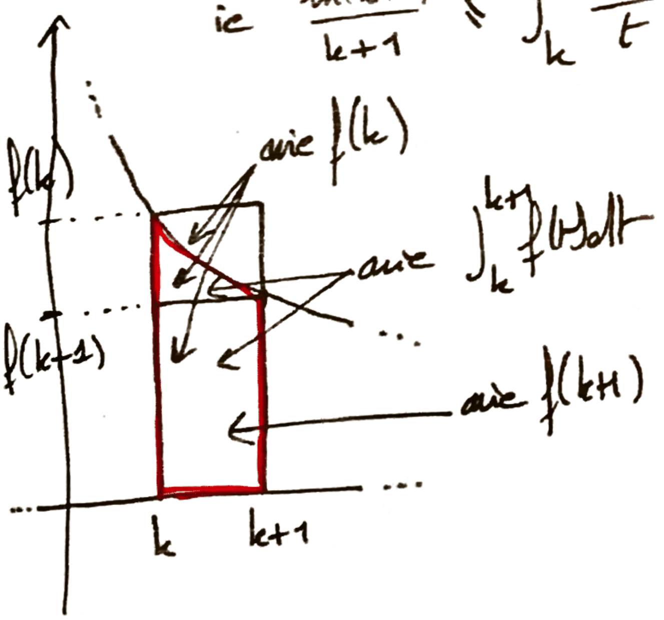
Donc f est décroissante sur $[e, +\infty[$ donc elle l'est aussi sur $[3, +\infty[$.

2. (b) Pour $k \geqslant 3$ on a donc f décroissante sur $[k, k+1]$

donc $\forall t \in [k, k+1]$, $\quad f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$

d'où par croissance de l'intégrale : $\displaystyle\int_k^{k+1} f(k+1)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,dt$

ie $\quad \displaystyle\frac{\ln(k+1)}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t} \leqslant \frac{\ln k}{k}$



Pour $n \geqslant 3$, on additionne ces inégalités pour k allant de 3 à n :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k+1)}{k+1} \leqslant \int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,dt \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k}$$

d'après la relation de Chasles.

On a donc $\forall n \geqslant 3$, $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+1} \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,dt \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k}$

après changement d'indice dans le membre de gauche

Or $\displaystyle\int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,dt = \left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_3^{n+1} = \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2}$

$$\sum_{k=4}^{n+1} \frac{\ln k}{k} = S_n + \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln 3}{3} - \frac{\ln 2}{2} \quad (\text{car } \ln 1 = 0)$$

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} = S_n - \frac{\ln 2}{2}$$

Donc pour $n \geqslant 3$:

$$S_n + \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln 3}{3} - \frac{\ln 2}{2} \leqslant \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2} \leqslant S_n - \frac{\ln 2}{2}$$

ou encore :

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2} \leqslant S_n \leqslant \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \underbrace{\frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln^2(3)}{3}}_{=C}$$

En divisant par $\dfrac{\ln^2(n+1)}{2}$:

$$1 + \frac{\ln 2}{\ln^2(n+1)} - \frac{\ln^2(3)}{\ln^2(n+1)} \leqslant \frac{2.S_n}{\ln^2(n+1)} \leqslant 1 - \frac{2}{(n+1).\ln(n+1)} + \frac{2.C}{\ln^2(n+1)}$$

Donc par encadrement : $\dfrac{2S_n}{\ln^2(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln^2(n+1)}{2}$. Mais $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$= \ln n + \underset{n\to+\infty}{o}(\ln n)$$

donc $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$

Finalement : $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln^2(n)}{2}}$ et donc $\boxed{S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$