TD15 Exe 10

1. $\int_1^2 \frac{u-1}{2u+1}\,du = \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}2u+1 - 3}{2u+1} = \frac{1}{2}\cdot\int_1^2 \left(1 - \frac{3}{2u+1}\right)du$

$= \frac{1}{2}\left[u - \frac{3}{2}\ln(|2u+1|)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{3}{2}\ln 5 - 1 + \frac{3}{2}\ln 3\right)$

$= \boxed{\frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{3}{2}\ln\frac{3}{5}\right)}$

2. $\frac{x+1}{x^2+4x+4} = \frac{x+1}{(x+2)^2} = \frac{\alpha}{x+2} + \frac{\beta}{(x+2)^2}$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}$ d'après le chap 4

ici $\frac{x+1}{x^2+4x+4} = \frac{x+2-1}{(x+2)^2} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}$ dès que $x \neq -2$

Donc $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+4x+4}\,dx = \left[\ln(|x+2|) + \frac{1}{x+2}\right]_0^1 = \ln(3) + \frac{1}{3} - \ln(2) - \frac{1}{2}$

$= \boxed{\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{6}}$

3. X^2+X+1 n'a pas de racines réelles.

D'après le chap 4 il faut le factoriser sous forme canonique :

$X^2+X+1 = \left(X+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\times\left[\frac{4}{3}\left(X+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(X+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1\right]$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x+1+1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\times\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}$

donc $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln(|x^2+x+1|)\right]_0^1 + \frac{2}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1$

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\left(\ln 3 - \ln 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\sqrt{3} - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\ln 3 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}}$$